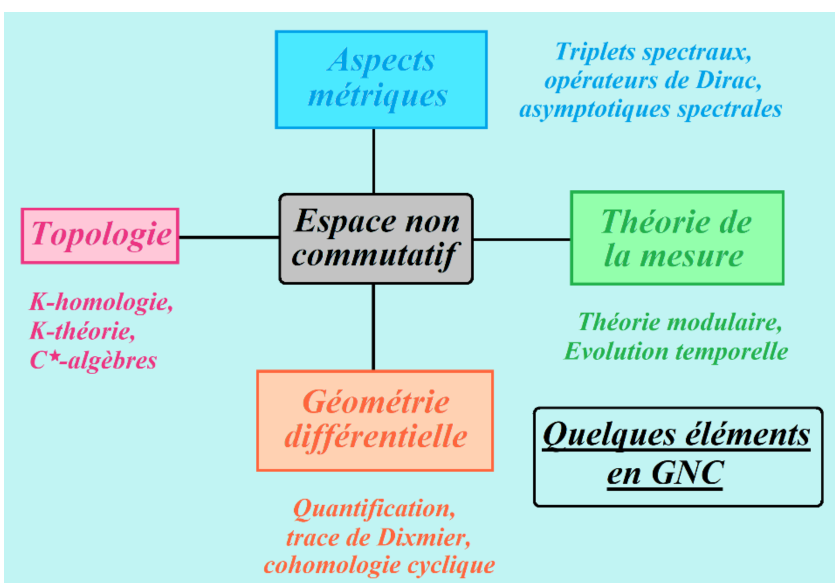
Géométrie non commutative

- **Géométrie non commutative** (« **GNC** »)

Branche des **mathématiques considérant** et **utilisant** d'**autres objets** que les **nombres** ou **éléments** dont le **produit** est **commutatif** *(Cf.* ***produits*** *de* ***matrices****)* et qui **représentent** les **coordonnées** d'une **notion généralisée** de l'**espace**.
Elle **énonce** des **lois** et **propriétés** de ces **espaces généralisés** avec l'**analogie** à la **géométrie classique**. Des **aspects** des **modèles matriciels** et de la **théorie M** sont **décrits** par une **TQC non commutative** où les **coordonnées spatio-temporelles ne** sont **pas commutatives**. Cela la **relie** aux **modèles matriciels** et à la **théorie M**.
D'autres **liens existent** entre **GNC** et **théories physiques**. Elle **représente** une **généralisation** de la **géométrie différentielle ordinaire** avec un **formalisme algébro-géométrique** qui **supporterait** une **théorie** de **gravitation quantique** par la **généralisation** avec les **opérateurs** de la **RG**.

Elle utilise ainsi :
. des **objets algébriques** avec une **non commutativité** qui **remplacent** ceux de **géométrie riemannienne**. Le **centre** des **algèbres**, **espace** des **connexions linéaires** qu'**induisent** les **contraintes non commutatives consiste** souvent en un **espace vectoriel** de **dimension finie**.
. la **quantification** de la **RG** avec la **prise** en **compte** de la **longueur de Planck**, d'où **émerge** la **non commutativité** de l'**espace-temps**.
. la **reconstruction** du **MS** de la **physique** des **particules élémentaires combiné** à la **gravitation** d'après les **concepts** de la **GNC** et de **nouveaux outils algébriques**. Les **algèbres associatives non commutatives remplacent** ainsi les **groupes** de **structure non abélienne** et des **modules irréductibles**, les **représentations**.



- ***TQC non commutatifs*** *sur l'**espace-temps** (**Aspects métriques** et **nature**)*

  ***Elle** est une **application** de la **non commutativité** à l'**espace-temps** de la **TQC**, **produit** de la **GNC** et de la **théorie** des **indices** où les **fonctions** de **coordonnées** sont **non commutatives**. Une **théorie** avec la **relation** de **commutation canonique** :* $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ ***empêche** ainsi une **mesure précise** de la **position** d'une **particule** suivant **plus** d'un **axe**. **Deux propriétés** des **théories** des **champs non commutatives** sont le **phénomène** de **mélange UV/IR** où la **physique** aux **hautes énergies** est **efficiente**, **contrairement** aux **TQC**, et la **violation** de l'**invariance** de **Lorentz** du fait de la **direction privilégiée** de la **non-commutativité**.*

- **Motivations** de la **GNC** pour la **physique**

  Basée sur les **notions** et **outils** des **théories algébriques**, de **géométrie spinorielle** ou d'**analyse fonctionnelle**, la **GNC généralise** les **concepts** d'**espace topologique localement compact**, de **variétés riemanniennes orientées compactes** à **spin** et les **calculs différentiels** et **intégraux usuels** de la **géométrie différentielle**. En **physique quantique**, les **observables ne commutant pas** ont une **mesure locale indéfinie**. La **GNC soumet** de même la **non-commutativité** des **observables** à l'**espace-temps** et **explicite** la **physique** en **termes** des **concepts quantiques** et des **processus** de **quantification**. **Toute** l'**information topologique** d'un **espace** est **contenue** dans l'**ensemble** des **fonctions continues** sur **celui-ci** selon le **théorème** de **Gelfand-Naimark**. La **C*-algèbre unifère permet** de **généraliser celle** d'**espace topologique compact** et l'**extension non commutative** peut se **développer** en une **géométrie riemannienne non commutative** avec **calculs différentiels**, **intégraux**, **mesures**, **variétés riemanniennes** à **spin**, … Se **différentiant** des **théories** de **gravités quantiques**, des **cordes**, ou encore de la **gravité quantique** à **boucles**, la **GNC utilise** la **variété lorentzienne modélisant** l'**espace-temps** avec la **non commutativité intégrée** à sa **structure même**, **y excluant** la **continuité** et **nécessitant** une **longueur limite**, **celle** de **Planck**.
  Les **espaces non commutatifs** sont **dynamiques** et **possèdent** une **évolution temporelle canonique**. Les **variables réelles discrètes** et **continues y coexistent** *(**Elles ne commutent pas** entre **elles**.)*, puis dans le **calcul quantifié**, les **opérateurs**. En **physique quantique**, une **variable réelle** est un **opérateur autoadjoint** dans un **espace** de **Hilbert** (**séparable**) à **base dénombrable** et de **variables** à **spectre discret**. Afin de **reconstruire** la **géométrie** à l'**intérieur** du **formalisme spatial** de **Hilbert** de **mécanique quantique**, on **utilise** en **GNC** l'**élément** de **ligne**, **formulé** selon l'**inverse** de l'**opérateur** de **Dirac**, **codé** par le **propagateur** de **fermions** avec **corrections quantiques** si **habillés** et **champs** de **jauge** si **covariant**, de l'**algèbre** des **coordonnées**. On **applique** la **théorie** des **représentations évoluée** des **relations** de **commutation** de **Heisenberg** pour cet **opérateur** de **Dirac** *(**non localisé**)* suivant les **matrices gamma** et pour la **mesure** des **longueurs**, où **localement** $\mathbf{ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$, **substituée** avec un **infinitésimal** d'**opérateurs compacts** de l'**espace** de **Hilbert**.

- Le **triplet spectral** – **Lien** entre **GNC** et **physique**

  Il est l'**outil** de la **généralisation non commutative** de la **variété riemannienne** à **spin** et **relie** ainsi la **GNC** à la **physique**. La **fonctionnelle** d'**action particulière** sur le **produit** d'un **triplet spectral commutatif** (**variété riemannienne compacte**, **modélisant** l'**espace-temps continu**) avec un **triplet spectral** de **dimension nulle** (**algèbre matricielle**) **produit** l'**action spectrale** de **Chamseddine–Connes** qui permet de **retrouver** le **MS** et la **RG**. Un **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ où $\mathcal{A}$ est une **algèbre** d'**opérateurs** dans l'**espace** de **Hilbert** $\mathcal{H}$ et l'**opérateur non borné** $\mathcal{D}$ qui **code** l'**analogue** de l'**opérateur** de **Dirac**. L'**algèbre** $\mathcal{A}$ a priori **non commutative** a ses **automorphismes internes correspondant** aux **symétries internes** en **physique**.

- **Connexions non commutatives** *(Aspects métriques)*

  Elles sont **définies** par :

  . une **algèbre associative** $\mathcal{A}$, généralement prise **unitale** *(**contenant** une **identité** ×)*.

  . une **géométrie différentielle non commutative** où sont **définies** les **formes diff**.

  . un **module** à **droite** sur l'**algèbre** $\mathcal{A}$, **support** à l'**action** de la **connexion non commutative** (**espace** des **champs** de **matière en physique** des **particules**).

  On **étudie** les **connexions ordinaires** comme **connexions non commutatives** sur l'**algèbre** des **endomorphismes** d'un **fibré SU(n)** ou sur les **équivalents non commutatifs** des **théories** de **jauge abéliennes**, **théories** de **jauge non commutatives** dont les **ddl correspondent** à des **champs** de **jauge non abéliens**.

- **Fonctionnelles locales** *(Géométrie différentielle)*

  Elles sont **locales** de par leur **dépendance** au **comportement asymptotique** des **coefficients** de **Fourier**. En **TQC**, les **contre-termes rajoutés** par **renormalisation** pour des **corrections** au **lagrangien initial** des **divergences UV** sont **locales**.
  Les **divergences ne dépendent pas** des **perturbations bornées** du **comportement** dans l'**espace** des **impulsions**. Les **fondamentales apparaissent** comme **coefficient** d'une **divergence logarithmique** pour un **paramètre** de **coupure Λ croissant** vers l'**infini** : **résidu** dans le **schéma** de **régularisation**.
  En **GNC**, les **deux processus** de **construction** des **fonctionnelles locales** sont :
  . **Trace** de **Dixmier**
  L'**intégration** en **GNC** doit **concilier** d'**être** de **trace positive** *(afin de **permettre** des **permutations cycliques** sous la **fonctionnelle**)* et s'**annuler** sur les **infinitésimaux** d'**ordre > 1**, qui, **pour** des **opérateurs compacts positifs assimilés** à des **opérateurs** de **rang fini**, **implique** que l'**intégration** est une **fonctionnelle non normale**.
  . **Résidu non commutatif** de **Wodzicki**
  Trace sur l'**algèbre** des **opérateurs pseudo-différentiels** sur une **variété compacte différentiable définie** avec une **densité locale**, c'est un **outil fonctionnel** sur des **classes** d'**opérateurs** qui **filtre** les **détails quantiques non pertinents** en **donnant** une **image semi-classique**. Il **légitime** l'**intégrale** des **infinitésimaux** d'**ordre < 1** et s'**accorde** avec la **trace** de **Dixmier** pour les **infinitésimaux** d'**ordre ≥ 1**.
  Comme la **trace** de **Dixmier**, elle s'**annule** pour les **infinitésimaux** d'**ordre > 1**.

Fiche GNC1 – Éléments de base

- **Constructions algébriques** de **GNC**

Certains **types** d'**espaces** (**topologiques**, **mesurables**, **différentiables**, ...) sont entièrement **caractérisés** par **une** de leurs **algèbres** de **fonctions** (**fonctions continues**, **mesurables bornées**, **différentiables**...). La **GNC fournit** une **version non commutative** de ces **espaces** en **considérant** des **algèbres non commutatives** avec des **propriétés adéquates** et **remplaçant** les **algèbres** de **fonctions** en **caractérisant** entièrement le **type** d'**espace non commutatif** qu'elles **représentent**. Si l'**une** de ces **algèbres** est **commutative**, elle doit notamment s'**accorder** avec la **bonne algèbre** de **fonctions** sur l'un des **espaces** de ce **type**.
La **géométrie algébrique comprend** les **ensembles** qu'elle **étudie** dans $\mathbb{C}^{\mathbf{n}}$ comme des **idéaux** de l'**algèbre** des **polynômes** $\mathbb{C}[\mathbf{X_1}, \dots, \mathbf{X_n}]$ dont les **caractéristiques** s'**expriment** donc **algébriquement**. Mais, de telles **algèbres** restent **commutatives**, en tant que **quotients** d'**algèbres** de **polynômes**. Le **théorème** de **Gelfand-Naïmark** sur les $\mathbf{C^* -}$ **algèbres commutatives** : **algèbres** de **fonctions continues** sur **espace topologique localement compact relie théorie** des **espaces topologiques** et **théorie** des $\mathbf{C^* -}$ **algèbres** : **équivalent non commutatif** des **espaces topologiques localement compacts**.
L'**analogue non commutatif** de la **théorie** de la **mesure** s'est **basé** sur les **algèbres** de **von Neumann** et outre la **topologie** et la **théorie** des **mesures**, la **géométrie différentielle non commutative implique** une **extension** des **notions** de **variétés différentiables**, **groupes** de **Lie**, **fibrés différentiables**, **connexions**, **métriques**.

Différentes algèbres non commutatives entrainent différentes généralisations :

. **Déformation** d'**algèbre** (**commutative**) de **fonctions** en **considérant** la **quantification** de type **Moyal**, qui **déforme** une **algèbre** de **fonctions** $\mathbf{C}^\infty$ **munie** d'une **structure** de **Poisson**. Un **complexe** de **de Rham non commutatif** est ainsi une **déformation** du **complexe** de **de Rham habituel** sur les **fonctions** $\mathbf{C}^\infty$ *(p.ex. **déformations** d'**algèbres** de **fonctions** sur des **groupes** de **Lie**).*
. **Groupes quantiques** en **physique** permettent de **construire** des **symétries** (**quantiques**) que ces **groupes génèrent**. Les **espaces** de **représentations**, (**quantiques**) sont **définis** par une **algèbre non commutative agissant** comme **algèbre** de **fonctions**.
. **Algèbres non commutatives** mais **non déformations** d'**algèbres** de **fonctions** (**algèbre** de **matrices**) avec une **généralisation** du **complexe** de **de Rham** *(**Lien** entre **homologie** de **de Rham non commutative**, **homologie cyclique** et **K-théorie**)*
. **Intrinsèquement** *(**Calcul différentiel basé** sur les **dérivations**, la **mécanique quantique correspondant** à une **mécanique classique non commutative**.),*
. **Algèbres** d'**opérateurs** sur **espace** de **Hilbert** avec un **calcul différentiel basé** sur un **opérateur** de **Dirac** *(suivant les **algèbres** d'**opérateurs**, la **K-théorie**, **K-homologie**, l'**homologie cyclique**, les **théorèmes** de l'**indice**).*

. **Algèbres non commutatives**, telles que **celles** de **Hopf**, **généralisent** la **notion** de **groupes** de **Lie**. On **introduit** alors un **complexe** de **de Rham non commutatif relatif** à cette **structure supplémentaire**, le **calcul différentiel bicovariant**.
. **C*-algèbres** : **généralisations non commutatives** d'**espaces topologiques localement compacts**
. **Algèbres** de **von Neumann** : **généralisations non commutatives** d'**espaces mesurables**, **induisant** une **géométrie différentielle non commutative**.
***Deux types** de **structures mathématiques** :*
*. **algébriques** (**algèbres d'opérateurs**) pour la **mécanique quantique**, et **structures différentiables** pour la t**héorie relativiste** de la **gravitation** et la **TQC**.*
*. **différentielles algébriques** avec la **cohomologie** de **Hochschild**, le **calcul différentiel universel**, **sous-algèbre différentielle graduée** d'une **algèbre différentielle graduée**, **lien** entre **celle-ci** et le **complexe** de **Hochschild** à **valeurs** dans l'**algèbre**, la **cohomologie cyclique**.*
. **K-théorie** des **espaces topologiques localement compacts classifiant** en **géométrie classique** et **apportant** la **notion** de **modules** comme **généralisations non commutatives** des **fibrés vectoriels**, pour des **C*-algèbres**, **généralisations non commutatives** des **espaces topologiques localement compacts**.
. **Généralisation non commutative** du **complexe** de **de Rham** pour **toute algèbre**.
. **Algèbre** des **matrices** avec le **calcul différentiel**, prototype de l'**algèbre non commutative** de **test** sur certaines **structures**.
. **Calcul différentiel** de **GNC**, des **groupes quantiques**.
. **Algèbre** de **Hopf**, avec l'**équivalent non commutatif** des **groupes usuels**.
. **Calcul différentiel bicovariant**, **généralisation non commutative** du **calcul différentiel usuel** sur les **groupes** de **Lie**
. **Calcul différentiel basé** sur les **dérivations** pour une **classe** de **bimodules généralisant** celle de **modules** sur une **algèbre commutative**.

- **Topologie** en **GNC** *(**Topologie**)*

La **GNC généralise** les **variétés différentiables** sans **spécification** de **points** ni de **trajectoires**. Un **espace** en **géométrie usuelle**, **ensemble** des **fonctions numériques** qui y sont **définies** et qui **forment** une **algèbre associative** sur un **corps**, également **commutative**, les **algèbres associatives non commutatives** s'**assimilent** alors de même à des **algèbres** de **fonctions** sur **espaces non commutatifs**.
L'**algèbre C(M)** des **fonctions continues** sur une **variété riemannienne M reconstitue seulement** la **topologie**. Le **triplet spectral issu** du **théorème** de l'**indice** d'**Atiyah-Singer**, **invariant algébrique** permettant de **reconstituer** la **structure riemannienne** est **construit** à partir d'un **fibré vectoriel lisse E au-dessus** de **M**, **fibré** de l'**algèbre extérieure**. L'**espace** de **Hilbert L^2(M, E)** des **sections** de **E** de **carré intégrable représente C(M)** (par les **opérateurs** de **multiplication**).
On peut **définir** un **opérateur non borné $\mathcal{D}$** sur **L^2(M, E)** d'**ensemble résolvant compact** tel que si **f** est **différentiable**, alors **$[\mathcal{D}, f]$** est **borné**. Une **variété riemannienne non commutative** se **caractérise** ainsi par un tel **triplet** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$.

- **Théorème** de l'**indice** d'**Atiyah-Singer** ***(Résumé)***

  Pour un **opérateur différentiel elliptique** entre deux **fibrés vectoriels** sur une **variété compacte**, l'**indice analytique** de la **dimension** de l'**espace** des **solutions** est aussi **celui topologique**. *L'**indice analytique** étant **entier**, l'**indice topologique**, **l**'est **nécessairement**. L'**indice** d'un **opérateur différentiel elliptique autoadjoint** est **nul**. **Cas particuliers** : **théorèmes** de **Chern-Gauss-Bonnet** et de **Riemann-Roch**.*

- **Théorème** d'**Atiyah-Jänich**

  Sur un **espace** de **Hilbert complexe** de **dimension infinie H**, l'**espace GL(H)** des **endomorphismes bornés inversibles** de **H** est tel que **toutes** les **applications** de **tout complexe fini** de **GL(H)** sont **homotopes** à une **constante**, pour la **topologie** de **norme** sur les **opérateurs**. Corollaire (**Théorème** de **Kuiper**) : ce **groupe** est **faiblement contractile** : **tous** ses **groupes** d'**homotopie** sont **triviaux**.

- **Triplet spectral** ***(Aspects métriques)***

  Ensemble de **données** qui **contient** les **informations** des **phénomènes géométriques** de **manière analytique**, il **correspond** à une **extension** du **théorème** de l'**indice** d'**Atiyah-Singer** aux **espaces « non commutatifs »**.
  Un **triplet spectral impair** est un **triplet** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ **composé** d'un **espace** de **Hilbert** $\mathcal{H}$, d'une **algèbre** $\mathcal{A}$ d'**opérateurs** sur $\mathcal{H}$ et d'un **opérateur autoadjoint densément défini** $\mathcal{D}$ **vérifiant** $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{A}, |[\mathbf{a}, \mathcal{D}]| < \infty$.
  Un **triplet spectral pair** est un **triplet spectral impair** avec une $\mathbb{Z}_2$-**gradation** sur $\mathcal{H}$ tel que $\forall$**a** $\in \mathcal{A}$ est **pair** et **D** est **impair** par rapport à cette **gradation**.
  Un **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est **p-sommable** de **manière finie** si $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{A}, \mathbf{a}\mathcal{D}$ a une **résolvante compacte appartenant** à la **classe** des $\mathbf{L}^{\mathbf{p}^+} -$ **opérateurs**.
  Soit $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{T})$ le **commutateur** de $|\mathcal{D}|$ avec un **opérateur T** sur $\mathcal{H}$. Un **triplet spectral** est « **régulier** » si les **éléments** de $\mathcal{A}$ et les **opérateurs** de la **forme [a,** $\mathcal{D}$**]** pour **a** $\in \mathcal{A}$ sont dans le **domaine** des $\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}$. Si $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est un **triplet spectral p-sommable**, sa **fonction zêta** $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{D}}$ est **définie** avec : $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) := \mathbf{tr}(|\mathcal{D}|^{-\mathbf{s}})$.
  Un **triplet spectral réel** est un **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ **accompagné** d'une **involution antilinéaire** $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{H}$, **vérifiant** $\forall$ **a, b** $\in$ **A**, $[\mathbf{a}, \mathcal{J}\mathbf{b}\mathcal{J}^{-1}] = \mathbf{0}$.
  Pour un **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, la **décomposition polaire** $\mathcal{D} = \mathbf{F}|\mathcal{D}|$, où **F** : **opérateur unitaire autoadjoint** (**phase** de $\mathcal{D}$) et **|** $\mathcal{D}$ **|** : **opérateur positif densément défini** (**partie métrique** de $\mathcal{D}$). $|\mathcal{D}|$ **définit** une **métrique** sur l'**ensemble** des **états purs** sur la **fermeture** de **norme** de $\mathcal{A}$.
  L'**unité F autoadjointe génère** une **carte** de la **K-théorie** de $\mathcal{A}$ en **nombres entiers** avec, si le **triplet spectral** est **sommable**, les **indices** de **Fredholm obtenus** par une **(p+1)-fonctionnelle** sur $\mathcal{A}$ **soumise** à des **conditions** afin de **donner** des **cocycles** de **Hochschild**, **cohomologie cyclique**. *On peut **définir** un **triplet spectral non compact** par une **algèbre** de **Moyal** en **ajoutant** au **triplet** une **algèbre topologique non unitale**.*

- **Triplet spectral**, **différentielle** – **Définitions** et **propriétés** *(avec **rappels**)*

Outil de la **généralisation non commutative** de la **variété riemannienne** à **spin**, **il relie** ainsi la **GNC** à la **physique**. Un **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ où $\mathcal{A}$ est une **algèbre** d'**opérateurs** dans l'**espace** de **Hilbert** $\mathcal{H}$ et l'**opérateur non borné** $\mathcal{D}$ **code** l'**analogue** de l'**opérateur** de **Dirac**. L'**algèbre** $\mathcal{A}$ n'est a priori **pas commutative** et ses **automorphismes internes correspondent** aux **symétries internes** en **physique**.
. Un **triplet spectral fini** est un **triplet spectral** de **dimension 0** tel que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$ sont de **dimension finie**. Si $\mathcal{H}$ est de **dimension finie**, le **triplet spectral ne** peut être de **dimension strictement positive**.
. Pour le **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, **espace** des **formes** de **degré 0** : $\boldsymbol{\Omega_D^0(\mathcal{A}) = \pi(\mathcal{A})}$, de **degré 1** : $\boldsymbol{\Omega_{\mathcal{D}}^1(\mathcal{A}) = \{\sum_k \pi(a_k)[\mathcal{D}, \pi(b_k)]; a_k, b_k \in \mathcal{A}\}}$.
. **Différentielle d** : $\boldsymbol{\Omega_D^0(\mathcal{A}) \to \Omega_{\mathcal{D}}^1(\mathcal{A}), \forall x \in \mathcal{A}, d\pi(x) = [\mathcal{D}, \pi(x)]}$.
Pour $\boldsymbol{k \in \mathbb{N}}$, l'**ev** $\boldsymbol{\Omega^k(\mathcal{A}) := \langle x_0 \delta x_1 \ldots \delta x_k \,; x_{j \in [\![0,k]\!]} \in \mathcal{A} \rangle}$ avec $\boldsymbol{\delta}$ **définie** par :
$\boldsymbol{\delta(1) = 0, \forall x, y \in \mathcal{A}, \delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)}$.
L'**application linéaire**, la **différentielle d** : $\boldsymbol{\Omega^k(\mathcal{A}) \to \Omega^{k+1}(\mathcal{A})}$ est telle que :
$\boldsymbol{\forall x_{j \in [\![0,k]\!]} \in \mathcal{A}, d(x_0 \delta x_1 \ldots \delta x_k) = \delta x_0 \delta x_1 \ldots \delta x_k}$. **d** est **nilpotente** et **vérifie** la **règle** de **Leibniz graduée** : $\boldsymbol{\forall \omega \in \Omega^k, \eta \in \Omega^l, d(\omega\eta) = d(\omega)\eta + (-1)^k \omega d(\eta)}$.
. L'**algèbre différentielle universelle** sur $\mathcal{A}$, $\boldsymbol{\Omega(\mathcal{A}) := \oplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k(\mathcal{A})}$ permet de **définir** les **différentielles** d'**ordre supérieur**.
$\boldsymbol{\pi}$ **définit** une **représentation** de l'**algèbre différentielle universelle** sur le **quotient** $\boldsymbol{\Omega_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}) = \pi(\Omega(\mathcal{A}))/\pi(d(\mathrm{Ker}\,\pi))}$. Et avec la **trace** de **Dixmier**, $\boldsymbol{\mathrm{Tr}_\omega}$,
$\boldsymbol{\pi(\omega) \longmapsto \mathrm{Tr}_\omega(\gamma\pi(\omega)|\mathcal{D}|^{-n})}$ **définit** une **trace graduée** sur $\boldsymbol{\pi(\Omega^n(\mathcal{A}))}$.

- **Produit tensoriel** de **triplets spectraux**

Soient $(\mathcal{A}_1, \mathcal{H}_1, \mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{A}_2, \mathcal{H}_2, \mathcal{D}_2)$, **triplets spectraux** de **dimensions respectives** $\boldsymbol{n_1}$ et $\boldsymbol{n_2}$, où $(\mathcal{A}_1, \mathcal{H}_1, \mathcal{D}_1)$ est **pair**, alors leur **triplet spectral produit** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ **défini** par l'**algèbre**, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, l'**espace** de **Hilbert**, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, l'**opérateur** de **Dirac**, $\boldsymbol{\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \otimes id_2 + \gamma_1 \otimes \mathcal{D}_2}$: **triplet spectral** de **dim**. $\boldsymbol{n_1 + n_2}$.
*La **représentation** π de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H}$ est le **produit tensoriel** $\pi_1 \otimes \pi_2$ **défini** si l'**un** des **triplets spectraux** est **pair**. Le **produit** de **deux triplets spectraux pairs** est **pair**.*

- **Construction** de **Gelfand**-**Naimark**-**Segal** (« **GNS** », *avec **rappels***)

Elle fait **correspondre** les ***-représentations cycliques** de $\mathcal{A}$ et des **fonctionnelles linéaires** (**états**) sur $\mathcal{A}$.
Une ***-représentation** d'une $\boldsymbol{C^* -}$ **algèbre** $\mathcal{A}$ sur un **espace** de **Hilbert** $\mathcal{H}$ est un **homomorphisme** d'**anneaux portant** l'**involution** sur $\mathcal{A}$ en **involution** sur les **opérateurs** $\boldsymbol{\pi}$ **non dégénérés** *(**Espace** des **vecteurs** $\{\pi(x)\xi, \xi \in \mathcal{H}, x \in \mathcal{A}\}$ **dense**.)* de $\mathcal{A}$ dans l'**algèbre** des **opérateurs bornés** sur $\mathcal{H}$. *Si $\mathcal{A}$ **contient** une **identité**, la **non-dégénérescence** s'**établit** par l'**action** de π donnant l'**opérateur** d'**identité** sur $\mathcal{H}$.*
Un **état** sur une $\boldsymbol{C^* -}$ **algèbre** $\mathcal{A}$ est une **fonctionnelle linéaire positive f** de **norme 1**.
Si $\mathcal{A}$ **admet** un **élément unitaire multiplicatif**, cela **équivaut** à **f(1) = 1**.

Pour une **représentation** $\boldsymbol{\pi}$ d'une $\mathbf{C^* - algèbre}$ $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ sur un **espace** de **Hilbert** $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}$ est un **vecteur cyclique** si l'**ensemble** $\{\boldsymbol{\pi(a)\xi}, \mathbf{a} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}\}$ est de **norme dense** dans $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, $\boldsymbol{\pi}$ est alors une **représentation cyclique**.
Tout ***vecteur non nul*** *d'une* ***représentation irréductible*** *est* ***cyclique***.
. **Construction GNS** : Soient $\boldsymbol{\pi}$ une ***-représentation** d'une $\mathbf{C^* - algèbre}$ $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ sur l'**espace** de **Hilbert** $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ et $\boldsymbol{\xi}$ un **vecteur cyclique** de **norme unitaire** pour $\boldsymbol{\pi}$.
$\mathbf{a} \longmapsto \langle \boldsymbol{\pi(a)\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle$ est un **état** de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.
Inversement, chaque **état** de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ peut être **considéré** comme un tel **état vectoriel** sous une **certaine représentation canonique**.
Pour $\boldsymbol{\rho}$: **état** de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\exists$ ***-représentation** $\boldsymbol{\pi}$ de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ **agissant** sur un **espace** de **Hilbert** $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ de **vecteur cyclique unitaire distingué** $\boldsymbol{\xi}$ tel que : $\forall\, \mathbf{a} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\rho}(\mathbf{a}) = \langle \boldsymbol{\pi}(\mathbf{a})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle$.
La **construction GNS** est **utilisée** pour **démontrer** le **théorème** de **Gelfand-Naimark énonçant** que **toute** $\mathbf{C^* - algèbre}$ est **isométriquement *-isomorphe** à une $\mathbf{C^* - sous\text{-}algèbre}$ d'**opérateurs bornés** sur un **espace** de **Hilbert**.
La **somme directe** des **représentations GNS correspondantes** de tous les **états** est la **représentation universelle** de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ qui **comporte toute représentation cyclique**.
Comme **toute *-représentation** est **somme directe** de **représentations cycliques**, **toute *-représentation** de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est **somme directe** d'une **somme** de **copies** de la **représentation universelle**. Et si $\boldsymbol{\Phi}$ est la **représentation universelle** d'une $\mathbf{C^* - algèbre}$ $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, la **fermeture** de $\boldsymbol{\Phi(\mathcal{A})}$ dans la **topologie** des **opérateurs faibles** est une **algèbre** de **von Neumann enveloppante** de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *(****Algèbre*** *de* ***von Neumann*** *avec toutes les* ***informations algébriques*** *d'****opérateurs*** *sur* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*)*.

- **Axiomes** de **caractérisation** des **variétés** à **spin**

. **Axiome** de **dimension**
Pour une **géométrie** de **dimension n**, $\mathbf{ds} = |\boldsymbol{\mathcal{D}}|^{-1}$ est un **infinitésimal** d'**ordre** $\mathbf{1/n}$.
. **Condition** d'**ordre 1** : $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}, \left[[\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\pi}(\mathbf{a})], \boldsymbol{\pi}(\mathbf{b})\right] = \mathbf{0}$.
. **Axiome** de **régularité**
$\forall\, \mathbf{a} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\pi}(\mathbf{a})$ et $[\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\pi}(\mathbf{a})] \in \cap_{\mathbf{k}} \mathbf{D}.\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{k}}$: **intersection** des **domaines** des $\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{k}}$, où $\boldsymbol{\delta}$, la **dérivation** est / $\forall\, \mathbf{b} \in$ **algèbre engendrée** par $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{a})$ et $[\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\pi}(\mathbf{a})]$ $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{b}) = [\boldsymbol{\mathcal{D}}, \mathbf{b}]$.
. **Axiome** d'« **orientabilité** »
$\exists \mathbf{c} \in \mathbf{Z_n}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, **cycle** de **Hochschild** de **dimension n** tel que $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{c}) = \boldsymbol{\gamma}$ si **n** : **pair** et $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{c}) = \mathbf{1}$ si **n** : **impair**. On a $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{a_0} \otimes \mathbf{a_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{a_n}) = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{a_0})[\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\pi}(\mathbf{a_1})] \ldots [\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\pi}(\mathbf{a_n})]$.
. **Axiome** de **finitude**
L'**intersection** des **domaines** des **puissances** $\boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{k}}$ de l'**opérateur** de **Dirac** $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est un **module projectif fini** sur $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ où : $\forall\, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}, \mathbf{a} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}, \langle \boldsymbol{\pi}(\mathbf{a})\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \int \mathbf{a}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta})\mathbf{ds}^{\mathbf{n}}$ **définit** une **structure hermitienne** $(.,.)$. *Cela* ***caractérise*** *les* ***spineurs*** *de* ***classe*** $\boldsymbol{C^\infty}$.
. **Dualité** de **Poincaré**
La **matrice** de la **forme** d'**intersection** $\cap: \boldsymbol{K_*}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \times \boldsymbol{K_*}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \to \mathbb{Z}$ est **non dégénérée**.
. **Axiome** de **réalité**
Soit l'**opérateur antiunitaire** $\boldsymbol{\mathcal{J}}$, qui, si $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est l'**opérateur** de **Dirac**, est l'**opérateur** de **conjugaison** de **charge** et dans le cas **général**, on a *(Cf.* ***algèbre*** *de* ***Clifford****)* :

$\forall$ **x** $\in \mathcal{A}$, $\mathcal{J}\pi(x)\mathcal{J}^{-1} = \pi(x)^*$ et qui **vérifie** $\mathcal{J}^2 = \epsilon$, $\mathcal{J}\mathcal{D} = \epsilon'\mathcal{D}\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}\gamma = \epsilon''\gamma\mathcal{J}$ où ϵ, ϵ', ϵ'' sont **déterminés** selon la **dimension n modulo 8** :

n mod 8	0	1	2	3	4	5	6	7
ϵ	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
ϵ'	1	-1	1	1	1	-1	1	1
ϵ''	1		-1		1		-1	

- **Passage** au cas **non commutatif – Outil 1** : **opérateur** de **Dirac** $\mathcal{D}$ *(avec **rappels**)*

  L'**analogue non commutatif** du **calcul différentiel** et de la **géométrie riemannienne nécessite** un **opérateur** $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{H}$ qui, pour une **variété munie** d'une **structure riemannienne** à **spin**, est **celui** de **Dirac**. En **non commutativité**, on **considère** les **éléments** de $\mathcal{A}$ **généralisant** les **fonctions** et **préservant** les **propriétés** de la **différentielle** pour **celle** de **x** $\in \mathcal{A}$, et qui s'**accorde** au **cas commutatif**. $\forall$ **x** $\in \mathcal{A}$, la **dérivée extérieure** de la **représentation** *(0-forme)* dans l'**algèbre** des **opérateurs** sur $\mathcal{H}$, $\pi(x) \in \Omega^0_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$.

- **Passage** au cas **non commutatif – Outil 2** : **trace** de **Dixmier** Tr_ω *(avec **rappels**)*

  Pour $\mathcal{D}$ **opérateur** de **Dirac** en **coordonnées locales**, ω_μ, la **connexion spinorielle**, **connexion** de **Levi-Civita** qui s'**écrit partiellement** dans une **base** de **vielbeins**.
  $\forall$ **f** $\in C^\infty(\mathcal{M})$, $[\mathcal{D}, \pi(f)] = \left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \omega_\mu\right), f\right] = i\gamma^\mu\partial_\mu f$. On **identifie** $i\gamma^\mu$ à la **forme différentielle** dx^μ et donc $[\mathcal{D}, \pi(f)]$ à df. On a avec Tr_ω : **trace** de **Dixmier**,
  $\int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} d^n x f = \left(2^{n-[n/2]}\pi^{n/2}\right)\Gamma(1 + n/2)\mathrm{Tr}_\omega(\pi(f)|\mathcal{D}|^{-n})$.
  D'où l'**analogue** de l'**intégrale** d'un **élément a** $\in \mathcal{A}$,
  $⨍ a ds^n := \left(2^{n-[n/2]}\pi^{n/2}\right)\Gamma(1 + n/2)\mathrm{Tr}_\omega(\pi(a)|\mathcal{D}|^{-n})$, $ds = \sqrt{\mathcal{D}^2}$.
  Une **condition** de **décroissance** aux **valeurs propres** de $|\mathcal{D}|^{-n}$ *(Cf. **axiome de dimension**)* est **subséquente** à l'**utilisation** de la **trace** de **Dixmier**.
  L'**objet fondamental** en **GNC** est le **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ **formé** d'une **algèbre involutive** $\mathcal{A}$ **munie** d'une **représentation involutive** π sur un **espace** de **Hilbert** $\mathcal{H}$. $\mathcal{D}$ est un **opérateur non borné** et **hermitien** à **résolvante compacte** et tel que $\forall$ **x** $\in \mathcal{A}$, $[\mathcal{D}, \pi(x)]$ est **borné**.
  Dans le cas **commutatif**, la **différentielle** d'une **fonction f**, $df = [\mathcal{D}, f] = i\gamma^\mu\partial_\mu f$, est un **opérateur borné** et on a que $\forall x \in \mathcal{A}$, $[\mathcal{D}, \pi(x)]$ **borné** est **nécessaire** pour l'**intégration** des **formes différentielles** avec la **trace** de **Dixmier**. Si la **dimension** de l'**espace** est **paire**, la **construction** de l'**analogue non commutatif** des **formes différentielles** et de leur **intégration utilise** une **$\mathbb{Z}_2$-graduation** γ, qui, dans le **cas commutatif**, est la **graduation** γ^{n+1} de l'**algèbre** de **Clifford**. Si **n** est **pair**, le **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est **supposé pair** s'il **existe** une **involution hermitienne** γ, la **chiralité**, qui **anticommute** avec $\mathcal{D}$ et $\forall x \in \mathcal{A}$, $[\gamma, \pi(x)] = 0$.
  Si **P** est un **opérateur pseudo-différentiel** d'**ordre** $-n$ **agissant** sur les **sections** d'un **fibré vectoriel** sur **M**, la **trace** de **Dixmier vérifie** $\mathrm{Tr}_\omega(P) = 2^n\mathcal{W}(P)$, où $\mathcal{W}$: **résidu** de **Wodzicki** de **P**.

- Passage au cas non commutatif – Axiomes sur les triplets spectraux en GNC

Ils **déterminent** les **triplets spectraux** $(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D})$ **correspondant** à la **géométrie spinorielle** sur **variété compacte**. **Étendus** aux **algèbres non commutatives**,
on les fait **évoluer** ainsi :
. **Axiome** de **réalité** : on **introduit** un **opérateur antiunitaire**, $\mathcal{J}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,
correspondant** à l'**involution** de **Tomita-Takesaki, telle que :
$\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{A}, [\mathcal{J}\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})\mathcal{J}^{-1}, \boldsymbol{\pi}(\mathbf{y})] = \mathbf{0}$ et qui **vérifie** toujours les **relations** $\mathcal{J}^2 = \boldsymbol{\epsilon}$,
$\mathcal{J}\mathcal{D} = \boldsymbol{\epsilon}'\mathcal{D}\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\epsilon}''\boldsymbol{\gamma}\mathcal{J}$ où $\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}', \boldsymbol{\epsilon}''$ sont **identiques**.
. **Axiome** de **dimension** ne **dépendant** que du **spectre** de l'**opérateur** de **Dirac**,
il reste **identique**.
. **Axiome** de la **condition** d'**ordre 1**. L'**opérateur** de **Dirac** est un **opérateur différentiel** du **1**[er] **ordre** qui **nécessite** en **GNC** l'**introduction** de **bimodules**.
Soient $\mathcal{A},\mathcal{B}$: **algèbres**, $\mathbf{M}$: $(\mathcal{A},\mathcal{B}) -$ **bimodule**,
l'**application linéaire** $\mathbf{D}: \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ est un **opérateur** du **1**[er] **ordre** si elle **vérifie** :
$\forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{A}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{M}, \mathbf{D}(\mathbf{a}\boldsymbol{\xi}\mathbf{b}) + \mathbf{a}\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}\mathbf{b}) + \mathbf{D}(\mathbf{a}\boldsymbol{\xi})\mathbf{b}$.
Avec l'**axiome** de **réalité**. $\mathcal{H}$ étant **muni** d'une **structure** de **bimodule** sur $\mathcal{A}$,
L'**opérateur** de **Dirac vérifie** : $\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{A}, \left[[\mathcal{D},\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})], \mathcal{J}\boldsymbol{\pi}(\mathbf{y})\mathcal{J}^{-1}\right] = \mathbf{0}$.
. **Axiome** de **régularité**. Il reste **identique**.
. **Axiome** d'« **orientabilité** ». Il **évolue** en **GNC** car pour **n = 0**, tout **élément** de $\mathcal{A}$ **correspond** à un **cycle** de **dimension 0** et **nécessitant** que $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{a})$ pour $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$,
par l'**axiome** de **réalité**, $\mathcal{J}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}\mathcal{J}$, soit : $\boldsymbol{\gamma} = \mathcal{J}\boldsymbol{\pi}(\mathbf{a})\mathcal{J}^{-1}$. La **condition** d'**ordre 1** **exprime** $\left[[\mathcal{D},\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})], \mathcal{J}\boldsymbol{\pi}(\mathbf{y})\mathcal{J}^{-1}\right] = \mathbf{0} = 4\mathcal{D}$ car $\boldsymbol{\gamma}^2 = \mathbf{1}$ et $\boldsymbol{\gamma}\mathcal{D} + \mathcal{D}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$: $\mathcal{D} = \mathbf{0}$.
On **doit** ainsi **utiliser** l'**homologie** de **Hochschild** à **valeurs** dans un **bimodule**.

- Matrices de chiralité, multiplicité et structure de bimodule

Soit un **espace** de **Hilbert** $\mathcal{H}$ de **dimension finie muni** d'une **structure** de $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-**bimodule** sur **deux algèbres involutives** $\mathcal{A},\mathcal{B}$ sur $\mathbb{C}$, **représentées** comme **opérateurs** sur $\mathcal{H}$, peuvent s'**écrire** : $\mathcal{A} = \oplus_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{p}} \mathcal{M}_{\mathbf{p_i}}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{B} = \oplus_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{q}} \mathcal{M}_{\mathbf{q_j}}(\mathbb{C})$
*(**sommes directes** d'**algèbres** de **matrices**).*

. Les **applications** $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{L}}, \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{R}} / \forall\, \mathbf{a} \in \mathcal{A}, \mathbf{b} \in \mathcal{B}, \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{H}\ \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{L}}(\mathbf{a})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{a}\boldsymbol{\psi}$ et $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{R}}(\mathbf{b})\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}\mathbf{b}^*$.
$\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{L}}$ est une **représentation** de $\mathcal{A}$, $\mathcal{H} = \oplus_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\mathcal{H}_{\mathbf{pq}}, \mathcal{H}_{\mathbf{pq}} \simeq \mathbb{C}^{\mathbf{p}} \otimes \mathbb{C}^{\mathbf{m_{pq}}} \otimes \mathbb{C}^{\mathbf{q}}$.
Et dans une certaine **base orthogonale** de $\mathcal{H}$, avec cette **décomposition**,
$\forall\, \mathbf{a} \in \mathcal{A}, \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{L}}(\mathbf{a}) = \oplus_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \mathbf{a}_{\mathbf{p}} \otimes \mathbb{I}_{\mathbf{m_{pq}}} \otimes \mathbb{I}_{\mathbf{n_q}}$ et $\forall\, \mathbf{b} \in \mathcal{B}, \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{R}}(\mathbf{b}) = \oplus_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \mathbb{I}_{\mathbf{n_p}} \otimes \mathbb{I}_{\mathbf{m_{pq}}} \otimes \bar{\mathbf{b}}_{\mathbf{q}}$.
Alors, **tout** $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-**bimodule** est **déterminé**, à une **équivalence unitaire près**,
par sa **matrice** de **multiplicité** $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbb{N})$.

. Un **bimodule** sur $\mathcal{A}$ **correspond** à un **triplet spectral fini ssi** sa **matrice** de **multiplicité m** est **symétrique**. L'**opérateur** $\mathcal{J}$ tel que $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{R}} = \mathcal{J}\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{L}}\mathcal{J}^{-1}$ est alors **unique** à une **conjugaison** par un **unitaire près**.

. La **chiralité** $\boldsymbol{\chi}$, **hermitienne**, **commute** avec $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ et $\boldsymbol{\mathcal{J}\pi}(\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{\mathcal{J}^{-1}}$, donc peut s'**écrire** : $\boldsymbol{\chi} = \oplus_{\mathbf{i,j}}\mathbb{I}_{\mathbf{n_i}} \otimes \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{ij}} \otimes \mathbb{I}_{\mathbf{n_j}}$ et toute l'**information contenue** dans $\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{ij}}$, $\mathbf{m_{ij}}$ peut être **contenue** dans une **matrice** de **multiplicité**, à **coefficients** dans $\mathbb{Z}$, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ij}} = \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{ij}}\mathbf{m_{ij}}$.
Alors, la **chiralité** peut s'**exprimer** comme $\boldsymbol{\chi} = \oplus_{\mathbf{i,j}}\mathbf{sgn}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ij}})\mathbb{I}_{\mathbf{n_i}} \otimes \mathbb{I}_{|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ij}}|} \otimes \mathbb{I}_{\mathbf{n_j}}$.
A une **transformation unitaire près**, on **détermine** tous les $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{J}}, \boldsymbol{\chi})$ d'un **triplet spectral fini** par la **matrice**, à **coefficients** dans $\mathbb{Z}$, **symétrique** et **non dégénérée**, $\boldsymbol{\mu}$.

- **Opérateur** de **Dirac** et **chiralité** avec la **structure** de **bimodule**

. **Conjugaison** de **charge**
Soit un $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) -$ **bimodule** $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ de **matrice** de **multiplicité m**, on **passe** de l'**action** à **gauche** à l'**action** à **droite** par l'**opérateur** de **conjugaison** de **charge introduit** avec l'**axiome** de **réalité**. Un **bimodule** sur $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ **correspond** à un **triplet spectral fini ssi** sa **matrice** de **multiplicité** est **symétrique**. Alors, l'**opérateur** $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ tel que $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\mathcal{J}\pi}_{\mathbf{L}}\boldsymbol{\mathcal{J}^{-1}}$ est **unique** à une **conjugaison** par un **unitaire près**.
Explicitement : $\forall$ $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = \oplus_{\mathbf{i,j}}\mathbf{x_i}\mathbb{I}_{\mathbf{n_{i,j}}} \otimes \mathbb{I}_{\mathbf{m_j}}$ et $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = \oplus_{\mathbf{i,j}}\mathbb{I}_{\mathbf{m_i}} \otimes \mathbb{I}_{\mathbf{n_{i,j}}} \otimes \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{j}}$.
. **Chiralité**
L'**axiome** d'**orientabilité implique** que la **chiralité** $\boldsymbol{\chi}$ **commute** avec $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, comme $\boldsymbol{\mathcal{J}\pi}(\mathbf{A})\boldsymbol{\mathcal{J}^{-1}}$ et est **hermitienne**. $\forall$ $\mathbf{a^k}, \mathbf{b^k} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\chi} = \sum_{\mathbf{k}}\boldsymbol{\pi}(\mathbf{a^k})\boldsymbol{\mathcal{J}\pi}(\mathbf{b^k})\boldsymbol{\mathcal{J}^{-1}}$, a donc pour **matrice** / $\boldsymbol{\chi} = \oplus_{\mathbf{i,j}}\mathbb{I}_{\mathbf{n_i}} \otimes \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{ij}} \otimes \mathbb{I}_{\mathbf{n_i}}$, qui est **scalaire**, **symétrique** et $\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{ij}} = \pm \mathbf{1}$.

. **Tout opérateur** du **1$^{\text{er}}$ ordre** d'un $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}) -$ **bimodule** de **dimension finie**, où $\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}$ sont **sommes directes** d'**algèbres** de **matrices**, est la **somme** d'un **opérateur linéaire** à **gauche** et d'un **autre** à **droite**. D'après la **condition** d'**ordre un**, l'**opérateur** de **Dirac** $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est un **opérateur** du **1$^{\text{er}}$ ordre** pour la **structure** de **bimodule** de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ avec l'**axiome** de **réalité**. On peut donc **décomposer** $\boldsymbol{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\mathcal{L}} + \boldsymbol{\mathcal{R}}$, où $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ est **linéaire** à **gauche** et $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ à **droite**. L'**axiome** d'**orientabilité implique** l'**unicité** de cette **décomposition**. L'**opérateur** de **Dirac D** d'un **triplet spectral fini** s'**exprime** de façon **unique** comme : $\boldsymbol{\mathcal{D}} = \Delta + \boldsymbol{\mathcal{J}}\Delta\boldsymbol{\mathcal{J}^{-1}}$, où Δ : **1-forme**, **opérateur hermitien** qui **anticommute** avec $\boldsymbol{\chi}$ et qui **commute** $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{A}$ avec $\boldsymbol{\mathcal{J}\pi}(\mathbf{a})\boldsymbol{\mathcal{J}^{-1}}$.
L'**espace** des **1-formes** est le **bimodule engendré** par Δ.

. **Symétries** et **théories** de **jauge**
Les **symétries** d'un **espace** sont en **correspondance directe** avec les **automorphismes** de son **algèbre** des **coordonnées**. L'**étude** des **symétries** d'un **espace quantique défini** par une **algèbre** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, **concerne** tous les **automorphismes** de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Ces **symétries** sont **implémentées** au niveau du **triplet spectral** $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ en **associant** à chaque **automorphisme** $\boldsymbol{\varphi}$ une **transformation unitaire** $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\varphi}}$ de l'**espace** de **Hilbert** $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ telle que $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\pi}\mathbf{U}_{\boldsymbol{\varphi}}{}^{*} = \boldsymbol{\pi} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}$.

- **Triplet spectral** et **connexion hermitienne** sur **module projectif fini**

  Depuis un **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ et un **module projectif fini E** sur $\mathcal{A}$ **muni** d'une **connexion hermitienne** ∇, on peut **construire** un **nouveau triplet spectral** :
  Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un **triplet spectral** de **dimension n** et ∇ une **connexion hermitienne** sur un **module projectif fini E** à **droite** sur $\mathcal{A}$. Soit $\widetilde{\mathcal{A}}$: **algèbre** des **endomorphismes** de **E**, $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathrm{E}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{H}\otimes_{\mathcal{A}}\bar{\mathrm{E}}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}/\forall\, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \in \mathbf{E}, \mathbf{h} \in \mathcal{H}$,
  $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbf{e_1}\otimes_{\mathcal{A}}\mathbf{h}\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathbf{e_2}}) = (\nabla\mathbf{e_1})\mathbf{h}\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathbf{e_2}} + \mathbf{e_1}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{D}(\mathbf{h})\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathbf{e_2}} + \mathbf{e_1}\otimes_{\mathcal{A}}\mathbf{h}\overline{\nabla(\mathbf{e_2})}$.
  $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\mathcal{D}})$ est aussi un **triplet spectral** de **dimension n**. Les **opérateurs associés** à $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, $\mathcal{J}, \chi$ **deviennent** alors $\widetilde{\mathcal{J}}, \tilde{\chi}$ **associés** à $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\mathcal{D}})/\forall\, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \in \mathbf{E}, \mathbf{h} \in \mathcal{H}$,
  $\widetilde{\mathcal{J}}(\mathbf{e_1}\otimes_{\mathcal{A}}\mathbf{h}\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathbf{e_2}}) = \mathbf{e_2}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{J}(\mathbf{h})\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathbf{e_1}}$ et $\tilde{\chi}(\mathbf{e_1}\otimes_{\mathcal{A}}\mathbf{h}\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathbf{e_2}}) = \mathbf{e_1}\otimes_{\mathcal{A}}\chi(\mathbf{h})\otimes_{\mathcal{A}}\overline{\mathbf{e_2}}$.
  On peut alors **construire** une **action fermionique** pour un **module projectif général** tel que $\forall\, \tilde{\mathbf{h}} \in \widetilde{\mathcal{H}}$, $\mathbf{S_{Fermions}}[\tilde{\mathbf{h}}] = \langle\tilde{\mathbf{h}}, \widetilde{\mathcal{D}}\tilde{\mathbf{h}}\rangle$.
  Pour $\mathbf{E} = \mathcal{A}$, **module hermitien trivial** sur $\mathcal{A}$, les **connexions hermitiennes** ∇ sur **E** sont telles que : $\forall\, \mathbf{e} \in \mathcal{A}$, $\nabla\mathbf{e} = \mathbf{de} + \mathbf{Ae}$, où **A** : **1-forme hermitienne** et on **obtient** alors $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\mathcal{D}}) = (\mathcal{A}, \mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{D}})$ tel que $\widetilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} + \mathbf{A} + \mathcal{J}\mathbf{A}\mathcal{J}^{-1}$: on **retrouve** l'**opérateur** de **Dirac correspondant** aux **fluctuations internes** de la **métrique**.
  Et la **construction généralise** les **fluctuations internes** aux **théories** de **jauge définies** sur un **module projectif non trivial**.

- **Connexions**, **théories** de **jauge** avec les **triplets spectraux**

  Par **généralisation** aux **modules projectifs finis correspondants non commutatifs** des **fibrés vectoriels**, on **transforme** le **champ** de **jauge** en **GNC** :
  Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un **triplet spectral** et **E** un **module projectif fini** à **droite** sur $\mathcal{A}$.
  Une **connexion** est une **application linéaire** ∇ de **E** dans $\mathbf{E}\otimes\mathbf{A}\Omega^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ telle que $\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{E}, \mathbf{a} \in \mathcal{A}, \nabla(\boldsymbol{\xi}\mathbf{a}) = \nabla(\boldsymbol{\xi})\mathbf{a} + \boldsymbol{\xi}\otimes\mathbf{da}$. Cela **correspond** à la **dérivée covariante** et pour l'**algèbre commutative**, **E** est l'**espace** des **sections** d'un **fibré vectoriel complexe**. Si ∇_0 une **connexion** sur **E**, alors **toute connexion** sur **E**, $\nabla = \nabla_0 + \mathbf{A}$, où **A** : $\mathbf{E} \to \mathbf{E}\otimes\mathbf{A}\Omega^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ est un **morphisme** de **modules** sur $\mathcal{A}$.
  Tout **module projectif fini muni** d'une **structure hermitienne** est **isomorphe** à un **module** du **type** $\mathbf{eA^n}$ où $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathcal{A})$: **projection hermitienne**, de **structure hermitienne induite** ce celle **canonique** de $\mathbf{A^n}$. Sur ce **module**, **toutes** les **connexions hermitiennes** sont telles que $\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{A^n}$, **matrice** de **1-formes hermitiennes**, avec $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_\mathbf{n}\left(\Omega^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})\right)$ **vérifie** : $\nabla(\mathbf{e}\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{ed}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{eAe}\boldsymbol{\xi}$.
  Les **transformations de jauge** sont **obtenues** en faisant **agir** le **groupe** des **endomorphismes bijectifs** de **E** qui **conservent** la **structure hermitienne**, les **endomorphismes unitaires**, sur l'**espace** des **connexions**.
  Pour **définir** la **courbure** d'une **connexion** ∇, on l'**étend** à une **application** de $\mathbf{E}\otimes\mathbf{A}\Omega^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}) \to \mathbf{E}\otimes\mathbf{A}\Omega_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ **vérifiant (unicité)** $\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{E}, \forall\, \boldsymbol{\omega} \in \Omega_\mathrm{D}(\mathcal{A})$,
  $\nabla(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\omega}) = \nabla(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\xi}\otimes\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$.

- **Symétries** avec les **triplets spectraux**

  Si $\mathcal{A} = \mathbf{C^0(X)}$, une $\mathbf{C^* -}$ **algèbre commutative**, alors le **groupe** des **automorphismes** de $\mathcal{A}$ est **isomorphe** au **groupe** des **morphismes** de l'**espace topologique compact X**.
  Deux triplets spectraux $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ et $(\mathcal{A}', \mathcal{H}', \mathcal{D}')$ sont **équivalents** s'il **existe** une **application unitaire U** : $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ et un **isomorphisme** d'**algèbres** $\boldsymbol{\varphi} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ tel que $\boldsymbol{\pi' \circ \varphi = U\pi U^{-1}}$, $\boldsymbol{\mathcal{D}' = U\mathcal{D}U^{-1}}$, $\boldsymbol{\mathcal{J}' = U\mathcal{J}U^{-1}}$, $\boldsymbol{\gamma' = U\gamma U^{-1}}$ si **n** est **pair**.
  Une **symétrie** d'un **triplet spectral correspond** alors à un **automorphisme** $\boldsymbol{\varphi}$ de l'**algèbre** $\mathcal{A}$ et un **opérateur unitaire U** sur $\mathcal{H}$ **satisfaisant** à ces **relations** avec $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$, $\boldsymbol{\pi' = \pi}$. *Les **opérateurs** $\mathcal{J}, \gamma, \mathcal{D}$ peuvent **eux** être **modifiés**.*
  . En **commutatif**, si $\boldsymbol{\varphi}$ est un **difféomorphisme** d'une **variété M**, alors $\mathbf{u} \longmapsto \mathbf{u} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}$ est un **automorphisme** de $\mathbf{C^\infty(M)}$ et l'**action** d'un **opérateur unitaire** $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\varphi}}$ sur un **spineur** $\boldsymbol{\Psi} \in \mathcal{H}$ serait telle que $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\Psi})(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{x})\right)$.
  . **Automorphismes intérieurs** et **fluctuations** de la **métrique**
  Si l'**algèbre** des **coordonnées** est **non commutative**, on peut **construire** une **classe** d'**automorphismes** : $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{A}$, **unitaire**, on **définit** un **automorphisme** de $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{uxu^*}$ qui **génère** une **symétrie implémentée** par l'**opérateur unitaire** $\boldsymbol{U = \pi(u)\mathcal{J}\pi(u)\mathcal{J}^{-1}}$ car $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}$, $\boldsymbol{U\pi(x)U^{-1} = \pi(u)\pi(x)\pi(u^{-1}) = \pi(uxu^{-1})}$ *(Cf. l'**axiome** de **réalité**).*
  Sous la **transformation**, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ **inchangés** et l'**opérateur** de **Dirac** se **transforme** en : $\boldsymbol{\pi(u)\mathcal{J}\pi(u)\mathcal{J}^{-1}\mathcal{D}(\pi(u)\mathcal{J}\pi(u)\mathcal{J}^{-1})^{-1} = \mathcal{D} + \pi(u)A\pi(u^{-1}) + \pi(u)[\mathcal{D}, \pi(u^{-1})] + \mathcal{J}\pi(u)[\mathcal{D}, \pi(u^{-1})]\mathcal{J}^{-1}}$.
  Si $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est un **triplet spectral**, alors $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D}_A)$: **triplet spectral** de **même dimension** avec l'**opérateur** de **Dirac covariant** : $\boldsymbol{\mathcal{D}_A = \mathcal{D} + A + \mathcal{J}A\mathcal{J}^{-1}}$, où **A** : **champ** de **jauge**. Les **transformations** de **jauge définies** par l'**opérateur unitaire** $\boldsymbol{\pi(u)\mathcal{J}\pi(u)\mathcal{J}^{-1}}$ font **évoluer** l'**opérateur** $\boldsymbol{\mathcal{D}_A}$ en :
  $\boldsymbol{\mathcal{D} + \pi(u)A\pi(u^{-1}) + \pi(u)[\mathcal{D}, \pi(u^{-1})] + \mathcal{J}(\pi(u)A\pi(u^{-1}) + \pi(u)[\mathcal{D}, \pi(u^{-1})])\mathcal{J}^{-1}}$.
  La **loi** de **transformation** du **champ** de **jauge** est ainsi : $\boldsymbol{A \to \pi(u)A\pi(u^{-1}) + \pi(u)}$.
  Les **triplets spectraux** permettant de **définir** les **distances** sur l'**espace** des **états** de $\mathcal{A}$, le **passage** de $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ à la **dérivée covariante** $\boldsymbol{\mathcal{D}_A}$ **change** la **métrique**.

- **Action spectrale** sur les **triplets spectraux**

  Un **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ **comporte** une **algèbre involutive** $\mathcal{A}$ **représentée fidèlement** par des **opérateurs bornés** sur un **espace** de **Hilbert** $\mathcal{H}$ et d'un **opérateur autoadjoint** $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{H}$ à **résolvante compacte** tel que, pour **A** : **1-forme autoadjointe** notamment, $[\mathcal{D}, \mathbf{A}]$ **borné**. Afin de pouvoir **construire** un **calcul pseudo-différentiel** *(pour **dériver** tout **élément** de $\mathcal{A}$)* et une **théorie** de **champ non commutative**, le **triplet** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ doit être de **dimension n** : les **valeurs singulières** $\boldsymbol{\lambda_k}$ de $\mathcal{D}$ sont telles que : $\boldsymbol{\lambda_{k+1} = \mathcal{O}(k/n)}$ et **régulier**, avec **A** et $[\mathcal{D}, \mathbf{A}] \in \bigcap_k \mathbf{D}.\boldsymbol{\delta^k}$, *où $\mathbf{D}.\boldsymbol{\delta^k}$: **domaines** des **dérivations** de $\boldsymbol{\delta^k} = \left[|\mathcal{D}|^k, .\right]$.*

L'**opérateur** de **conjugaison** de **charge** se **traduit** par une **notion** de **structure réelle** sur le **triplet spectral** : **opérateur antiunitaire** $\mathcal{J}$ qui **commute** ou **anticommute** avec $\mathcal{D}$ selon la **dimension** du **triplet** : $\mathcal{DJ} = \varepsilon\mathcal{JD}$, $\varepsilon = \pm 1$.
Les **bosons** de **jauge** sont **associés** aux **fluctuations internes** de l'**opérateur** de **Dirac** : $\mathcal{D} \to \mathcal{D}_A = \mathcal{D} + A + \varepsilon\mathcal{J}A\mathcal{J}^{-1}$, où **A** : **1-forme autoadjointe**, **combinaison linéaire** d'**opérateurs** du type $a_1[\mathcal{D}, a_2]$, où $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$. Soit alors un **triplet régulier** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ avec **structure réelle** $\mathcal{J}$, on **détermine** ensuite une **fonctionnelle** d'**action**. Le **principe** de l'**action spectrale** de **Chamseddine** et **Connes attribue** la **fonctionnelle fondamentale** $\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) = \mathrm{Tr}\,\Phi(\mathcal{D}_A/\Lambda)$ *(où* Φ *: **fonction** de **cut-off** et* Λ *: **paramètre** d'**échelle** de **masse**)* et, **calculée** en **fonction** de **A** en **disposant** de **toutes** les **informations**, on **utilise** un **cadre** de **calculs propre** aux **opérateurs pseudo-différentiels** sur le **triplet** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$: en posant $D \coloneqq \mathcal{D} + P^0$, où P^0, une **projection orthogonale** sur **Ker** $\mathcal{D}$ *pour **obtenir** un **opérateur inversible**.*
$OP^0 \coloneqq \{T : t \longmapsto F_t(T) \in C^\infty\}$ et $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, OP^\alpha \coloneqq \{T : T|\mathcal{D}|^{-\alpha} \in OP^0\}$,
où $F_t(T) \coloneqq e^{it|D|}Te^{-it|D|} = e^{it|\mathcal{D}|}Te^{-it|\mathcal{D}|}$ car $|D| = |\mathcal{D}| + P^0$.
On a $OP^0 = \cap_{k\geq 0} D.\delta^k$, où $D.\delta^k$: **domaines** des **dérivations** $\delta^n = [|\mathcal{D}|^n, .]$.
Les **opérateurs pseudo-différentiels**, qui **forment** une **algèbre** $\mathbb{Z}$-**graduée**, peuvent être **définis** pour $\mathcal{D}(\mathcal{A})$: **algèbre générée** par $\mathcal{A}$, $\mathcal{J}\mathcal{A}\mathcal{J}^{-1}$, $\mathcal{D}$ et $|\mathcal{D}|$, comme **opérateurs T** si $\exists d \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}_0, P \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), R \in OP^{-n}$ tels que $P\mathcal{D}^{-2k} \in OP^d$ et $T = P\mathcal{D}^{-2k} + R$.
Soit un **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ ($\mathcal{A}$: **algèbre agissant** sur l'**espace** de **Hilbert** $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$: **opérateur** de **Dirac**), l'**action spectrale ne dépend que** du **spectre** de $\mathcal{D}$: $\mathcal{D}_A = \mathcal{D} + A + \varepsilon\mathcal{J}A\mathcal{J}^{-1}$, où **A** : **1-forme autoadjointe** sur $\mathcal{H}$. On a donc la **décomposition** : $A = ia_k[\mathcal{D}, b_k]$, où $a_k, b_k \in \mathcal{A}$, $\mathcal{J}$: **structure réelle** sur le **triplet correspondant** à la **conjugaison** de **charge**, **dépend** de sa **dimension**.

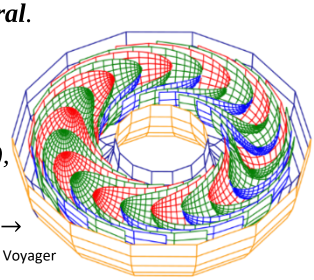
- **Fonction zêta**, d'**opérateur**, $⨍$ et **spectre** de **dimension** de **triplet spectral réel**

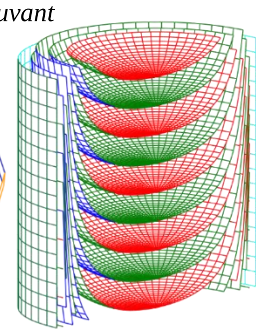
Si $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{J})$, **triplet spectral régulier réel** de **dim. n**, **A** : **1-forme autoadjointe**, $\mathcal{D}_A \coloneqq \mathcal{D} + A + \varepsilon\mathcal{J}A\mathcal{J}^{-1}$, $D_A \coloneqq \mathcal{D}_A + P_A$, où P_A : **projection** sur **Ker** $\mathcal{D}_A$. **Fonction zêta** d'un **opérateur Y** pour $X = \mathcal{D}, \mathcal{D}_A$: $\zeta_X^Y(s) \coloneqq \mathrm{Tr}(Y|X|^{-s})$, $\zeta_X(s) \coloneqq \mathrm{Tr}(|X|^{-s})$.
L'**intégrale non commutative**, **liée** au **résidu** de **Wodzicki** pour les **triplets spectraux**, se **définit** pour un **triplet T** par : $⨍T := \underset{s=0}{\mathrm{Res}}\, \zeta_D^T(s) = \underset{s=0}{\mathrm{Res}}\, \mathrm{Tr}(T|D|^{-s})$.
Le **spectre** de **dimension** d'un **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est l'**ensemble** $Sd(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ de **tous** les **pôles** des **fonctions** $\zeta_{\mathcal{D}}^P \coloneqq s \longmapsto \mathrm{Tr}(P|\mathcal{D}|^{-s})$,
où **P** : **opérateur pseudo-différentiel** dans OP^0. *Le **triplet spectral*** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ *est **simple** si tous ces **pôles** sont **simples**.* $Sd(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ *est également l'**ensemble** des **pôles** des **fonctions*** $s \longmapsto Tr\left(B|D|^{-s-2k}\right)$, *où* $k \in \mathbb{N}_0, B \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.
Le **théorème** de l'**indice** doit **exprimer** pour être **applicable** l'**indice** d'un **opérateur non pas** avec la **trace** et de l'**opérateur F**, mais en **fonction** de la **trace** de **Dixmier** et de l'**opérateur** de **Dirac**. **Ne** pouvant seulement **utiliser** la **trace** de **Dixmier**, on doit **la généraliser** pour tout **triplet spectral** via le **résidu** de **Wodzicki généralisé en**

considérant que les **fonctions ζ**, **construites** avec l'**opérateur** de **Dirac**, peuvent être **prolongées analytiquement** *sinon éventuellement sur un* ***sous-ensemble discret*** *de* $\mathbb{C}$.
Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un **triplet spectral** de **dimension n**. $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ a un **spectre** de **dimension discret $\Sigma \in \mathbb{C}$** si les **fonctions** telles que $\zeta_b(z) = \mathrm{Tr}(b|\mathcal{D}|^{-z})$ où $\mathrm{Re}(z)$ est assez **grand** et $\forall\, b \in \mathcal{B}$, **algèbre engendrée** par **A**, $[\mathcal{D}, A]$ et les **commutateurs itérés** $\delta^n(\pi(A))$ et $\delta^n([\mathcal{D}, A])$avec$|\mathcal{D}|$, se **prolongent analytiquement** sur $\mathbb{C}\backslash\Sigma$.
Si $\forall\, z = s + it, s > 0$, la **fonction** $t \longmapsto \Gamma(z)\zeta_b(z)$ est à **décroissance rapide**, le **spectre** de **dimension** est un **sous-ensemble discret** de $\mathbb{C}$ qui **correspond** aux **pôles simples** des **fonctions ζ généralisées** du cas **classique**. Il y a de multiples **triplets spectraux** ayant un **spectre** de **dimension simple**, comme le **tore non commutatif**, **exemple** de **produit croisé** d'une **variété riemannienne** par le **groupe engendré** par **une** de ses **isométries**. Avec le **produit croisé** par le **groupe formé** de **tous** les **difféomorphismes**, le **triplet spectral obtenu** a encore un **spectre** de **dimension discret** et **correspond** à la **géométrie invariante sous** les **difféomorphismes**.
On **généralise** alors le **résidu** de **Wodzicki** :
$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall b \in B, \tau_k(b) = \underset{z=0}{\mathrm{Rés}}\, z^k \zeta_b(2z) = \underset{z=0}{\mathrm{Rés}}\, z^k \mathrm{Tr}(b|\mathcal{D}|^{-2z})$.
Dans le **cas commutatif**, les **pôles** des **ζ** sont **simples** et **τ_0 correspond** au **résidu** de **Wodzicki**, **trace** sur l'**algèbre** des **opérateurs pseudo-différentiels**, **attribuant** donc à la **trace** de **Dixmier** la **notion** de **trace**. Cela se **généralise** dans le **cas non commutatif** : si le **spectre** de **dimension** est **simple**, τ_0 est une **trace** sur **B** et si **quelques pôles** sont **multiples**, seul le **résidu** d'**ordre** le **plus élevé** est une **trace**.
. Si le **triplet spectral** est **simple**, l'**intégration non commutative** $⨍$ est une **trace** sur $\Psi(\mathcal{A})$. En effet pour $P_1 \in OP^{k_1}$, $P_2 \in OP^{k_2} \in \Psi(\mathcal{A})$,
$P_1[P_2, |D|^{-s}] \sim -\sum_{j=1}^{N} \underset{s=0}{\mathrm{Res}}\, g(-s, j)(P_1 \varepsilon^j(P_2)|D|^{-s}) \bmod OP^{-N-1+k_1+k_2-\mathrm{Re}(s)}$.
$\rightarrow \underset{s=0}{\mathrm{Res}}\, \mathrm{Tr}(P_1[P_2, |D|^{-s}]) = -\sum_{j=1}^{N=n+k_1+k_2} \underset{s=0}{\mathrm{Res}}\, g(-s, j)\mathrm{Tr}(P_1 \varepsilon^j(P_2)|D|^{-s}) = 0$.
donc $⨍ P_1 P_2 = \underset{s=0}{\mathrm{Res}}\, \mathrm{Tr}(P_1|D|^{-s}P_2) = ⨍ P_2 P_1$.
. Si le **triplet spectral** est **simple**, $⨍ |D_A|^{-n} = ⨍ |D|^{-n}$.
. Si $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, **triplet spectral** et $X \in \Psi(\mathcal{A})$, $⨍ X^* = \overline{⨍ X}$. Si le **triplet spectral** est **réel**, alors, pour $X \in \Psi(\mathcal{A})$, $\mathcal{J}X\mathcal{J}^{-1} \in \Psi(\mathcal{A})$, $\mathcal{J}X\mathcal{J}^{-1} = ⨍ X^* = \overline{⨍ X}$.

- **Étude** sur le **tore non commutatif** (« **TNC** ») de **dimension n**

*Tore : **objet géométrique représentant** un **tube courbé**, **refermé** sur **lui-même**. **TNC :** **C*-algèbre universelle engendrée** par U, V, **unitaires** / $UV = e^{i2\pi\theta}VU$. $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.*
*C'est une **déformation** de l'**algèbre** des **fonctions** sur le **tore** pouvant être **interprété** comme **triplet spectral**.*
***Représentations** d'une **foliation** (**relation** d'**équivalence** d'une **n-variété** de **classes** d'**équivalence** de **p-variétés connectées (feuilles)**), de **Reeb** (**division** de la **sphère** en **2 tores solides** le **long** d'un **2-tore**) →*





© commons.wikimedia.org – Ilya Voyager

Pour les **champs** de **jauge** et la **construction** des **théories** de **jauge**, les **éléments** de **base** de l'**espace** des **formes différentielles** sont $\mathbf{dx_{\mu_1} \wedge dx_{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_p}}$.
La **théorie** de **Yang-Mills** sur le **tore non commutatif** en **2D ne** peut se **généraliser** à **tous** les **triplets spectraux**. Soit un **module projectif fini E** à **droite** sur $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\Theta$. et **E** est de la **forme** $\mathbf{e}\mathcal{A}_\mathbf{n}$, où $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathcal{A})$ **satisfait** à $\mathbf{e^2 = e = e^*}$. De plus, la **structure hermitienne canonique** de $\mathcal{A}_\mathbf{n}$ **induit** sur **E** une **structure hermitienne**.
$\mathbf{\Omega^1_\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ **réunit** les **éléments** de la **forme** $\mathbf{\omega_\mu dx^\mu}$ où $\mathbf{\omega_\mu} \in \mathcal{A}$ et $\mathbf{dx^\mu = i\gamma^\mu}$,
l'**action** d'une **connexion** ∇ sur **tout** $\mathbf{e\zeta}$ de **E**, où $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{A}_\mathbf{n}$, est telle que :
$\nabla(\mathbf{e\zeta}) = \left(\mathbf{e\partial_\mu(e\zeta) + eA_\mu e\zeta}\right) \otimes \mathbf{dx^\mu}$, où $\mathbf{A_\mu} \in \mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathcal{A})$.
Cette **connexion** est **hermitienne ssi** si la **matrice** $\mathbf{A_\mu}$ est **antihermitienne**.
Avec $\mathbf{F = edede + ed(eAe)e + eAeAe}$, la **courbure** d'une **connexion** s'**exprime** comme **matrice** de **2-formes**, $\mathbf{F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu}$,
où $\mathbf{F_{\mu\nu} = e\partial_\mu e\partial_\nu e - e\partial_\nu e\partial_\mu e + e\partial_\mu(eA_\nu e)e - e\partial_\nu\left(eA_\mu e\right)e + \left[eA_\mu e, eA_\nu e\right]}$.
Avec les **matrices** de **Dirac** et la **commutation** des **dérivations**, la **courbure** peut aussi s'**écrire** $\mathbf{F_{\mu\nu}} = \left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right]$, où la **dérivée covariante** $\nabla_\mu : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ est **définie** par :
$\forall\ \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{A}_\mathbf{n}, \nabla(\mathbf{e\zeta}) = \nabla_\mu(\mathbf{e\zeta}) \otimes \mathbf{dx^\mu}$.
. **Construction** d'un **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ avec une **algèbre non commutative**, **déformation** de l'**algèbre** des **fonctions** sur le **tore**. Ce **triplet spectral** permet de **construire** une **GNC** de **dimension n** > **0**, **non issue** d'une **algèbre** de **fonctions** à **valeurs matricielles**.
Pour $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_\Theta$, l'**algèbre involutive** des **séries formelles** à **décroissance rapide** est l'**algèbre** des **fonctions** sur le **tore non commutatif** de **dimension n**.
$\sum_{\mathbf{p=(p_1,\ldots,p_n)}\in\mathbb{Z}^\mathbf{n}} \mathbf{f_p u_1^{p_1} \ldots u_n^{p_n}}$, *où* $\left(f_p\right)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ *est une **suite** à **décroissance rapide** de **nombres complexes** et* $u_{k\in[\![1,n]\!]}$ *: **unitaires vérifiant*** $\forall\ i, j \in [\![1, n]\!], u_i u_j = e^{i\Theta_{ij}} u_j u_i$.
*C'est l'**algèbre** des **fonctions** sur le **cercle** dans le **cas n = 1**.*
Elle peut s'**écrire** $\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^\mathbf{n}} \mathbf{f_p u^p}$ *où* $\left(f_p\right)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ *est une **suite** à **décroissance rapide** de **nombres complexes** et* u^p *: **unitaires vérifiant*** $\forall\ p, q \in \mathbb{Z}^n\ \ u^p u^q = e^{i\pi\Theta_{\mu\nu}p^\mu q^\nu} u^{p+q}$.
La **forme linéaire** $\boldsymbol{\tau}$ **définie** sur $\mathcal{A}_\Theta$ par $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u^p}) = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{p})$, est une **trace positive**, la **trace canonique** et **toute autre trace** s'**annule** sur les **unitaires** $\mathbf{u^p}$ **non centraux**.
La **construction** de l'**espace** de **Hilbert** $\mathcal{H}$ **associé** à $\mathcal{A}_\Theta$ se **base** sur la **construction GNS** pour l'**état** de la **trace** $\boldsymbol{\tau}$.
Soit $\mathcal{H}$ la **complétion** de l'**espace vectoriel** $\mathcal{A}_\Theta \otimes \mathbb{C}^{2^{[n/2]}}$ **muni** du **produit scalaire** :
$\left\langle\left(\mathbf{a_1}, \ldots \mathbf{a_{2^{[n/2]}}}\right), \left(\mathbf{b_1}, \ldots \mathbf{b_{2^{[n/2]}}}\right)\right\rangle = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{2^{[n/2]}}} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{a_i}^* \mathbf{b_i})$.
$\mathcal{A}_\Theta$ agit sur $\mathcal{H}$ par **multiplication** à **gauche** et cette **action** $\boldsymbol{\pi}$ est une **représentation** d'**algèbre involutive** par des **opérateurs bornés**. Cela **correspond** à **remplacer** les **suites** à **décroissance rapide** de $\mathcal{A}_\Theta$ par les **suites** de **carré sommable**, les **vecteurs** $\mathbf{u_p \otimes e_i}$ **formant** une **base hilbertienne** de $\mathcal{H}$ si $(\mathbf{e_i})_{\mathbf{1\le i\le 2^{[n/2]}}}$ est une **base** de $\mathbb{C}^{2^{[n/2]}}$.
On **définit** sur $\mathcal{H}$ une **structure** de **bimodule** avec l'**opérateur** $\mathbf{J = C^*}$, où $\mathbf{C}$ est la **conjugaison** de **charge usuelle agissant** sur les **matrices** de **Dirac** en **nD** et $*$, l'**involution** de $\mathcal{A}_\Theta$. Pour $\boldsymbol{\partial}_\mathbf{i}$, **dérivation** telle que $\mathbf{\partial_i U_j = 2i\pi\delta_{ij}}$, **similaires** aux **dérivations** par rapport aux **coordonnées usuelles** sur le **tore**. Mais dans le **cas non**

commutatif, si $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_\Theta$, **non central**, et $\boldsymbol{\partial}$ une **dérivation**, alors $\mathbf{a}\boldsymbol{\partial}$ n'est **pas nécessairement** une **dérivation**.
Avec les **matrices** de **Dirac hermitiennes vérifiant** $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$, où $g^{\mu\nu}$: **métrique euclidienne**, l'**opérateur** de **Dirac** est $\mathcal{D} = i\gamma^\mu\partial_\mu$, **non borné** car les **dérivations ne** sont **pas définies** sur **tout** $\mathcal{H}$ mais **seulement** sur les **suites** à **décroissance rapide**. La **structure** de **bimodule comporte** la **multiplication** à **gauche** et à **droite** et $\mathcal{D}$ **constitué** de **dérivations**, on **vérifie** alors la **condition** du **premier ordre**. De plus, pour **n pair**, $\gamma = \gamma^{n+1}$, où γ^{n+1} : **chiralité** des **matrices** de **Dirac** en **nD**, on **vérifie** l'**axiome** de **réalité**. Pour l'**axiome** de la **dimension** : $\mathcal{D}^2 = \Delta\mathbb{I}_{2^{n/2}}$ **correspond** au **Laplacien**, ayant pour **vecteurs propres**, les **k-modes** de **Fourier vérifiant** $\Delta U^k = (2\pi|k|)^2U^k$. Si $\Lambda \to \infty$, le **nombre** de **valeurs propres** de Δ qui sont **supérieures** à Λ^2 est le **nombre** d'**éléments** de $\mathbb{Z}^n$ tels que $|k| \leq \Lambda$.
Or $\mathrm{Vol}\{k \in \mathbb{Z}^n; |k| \leq \Lambda\} = (\Lambda/2\pi)^n V_n(1)$, où $V_n(1) = \pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$ *(Cf. **PC0**)*
Si $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **suite décroissante** des **valeurs propres** de $ds = |\mathcal{D}|^{-n}$, alors on **obtient** :
$\lambda_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \left((4\pi)^{-n/2}/\Gamma(1+n/2)\right)/k$. : l'**axiome** de la **dimension** est **satisfait**.
Et, $\lim\limits_{N\to+\infty} (1/\log N)\sum_{k=1}^{N}\lambda_k = (4\pi)^{-n/2}/\Gamma(1+n/2)$.
Donc, $\mathrm{Tr}_\omega(ds^n) = (4\pi)^{-n/2}/\Gamma(1+n/2)$ est **indépendant** de ω.
$\forall\, a \in \mathcal{A}, [\mathcal{D}, a] = i\gamma^\mu\partial_\mu a$ sont des **opérateurs** de **multiplication** par des **éléments** de $\mathcal{A}$, ils **appartiennent** donc aux $\mathbf{D}.\,\delta^n$: **domaines** des **dériv°** de $\delta^n = \left[|\mathcal{D}|^k, .\right]$ car le **domaine** de **toutes** les **puissances** $||\mathcal{D}|^n$ est **formé** des **éléments** de $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^{2^{[n/2]}}$.
On **obtient** : $\forall a \in \mathcal{A}_\Theta$, $\mathrm{Tr}_\omega(\pi(a)|\mathcal{D}|^{-n}) = \left(2^{[n/2]-n}(\pi)^{-n/2}/\Gamma(1+n/2)\right)\tau(a)$.
$\forall a \in \mathcal{A}_\Theta$, $\tau(a) = \int a$.
. **Calcul différentiel**. **Représentation** $\boldsymbol{\pi}$ de l'**algèbre différentielle universelle donnée** par $\forall\, a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathcal{A}$ *(Cf. **Bases** de l'**algèbre différentielle**)*,
$a_0\delta a_1 \dots \delta a_p \mapsto \pi(a_0)[\mathcal{D}, a_1] \dots [\mathcal{D}, \pi(a_p)] = i^n\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_p} a_0\partial_{\mu_1}a_1 \dots \partial_{\mu_p}a_p$.
Et comme $\pi(\delta u_1 \dots \delta u_p) = (-2\pi)^p\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_p}$,
$\forall\, \gamma^{\mu_1}, \dots, \gamma^{\mu_p}$ **matrices** de **Dirac**, $\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_p} \in \pi(\Omega^p(\mathcal{A}))$, donc :
$\pi(\Omega^p(\mathcal{A})) = \left\{\omega_{\mu_1\dots\mu_p}\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_p}, \omega_{\mu_1\dots\mu_p} \in \mathcal{A}_\Theta\right\}$.
Soit la **forme différentielle**, $\omega = (1/p!)\omega_{\mu_1\dots\mu_p}dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_p} \in \Omega^p_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$,
sa **dérivée extérieure** est $d\omega = (1/p!)\partial_\rho\omega_{\mu_1\dots\mu_p}dx_\rho \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_p}$.
Soit $\sigma = (1/q!)\sigma_{\nu_1\dots\nu_q}dx_{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\nu_q} \in \Omega^q_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$, le **produit**
$\omega\sigma = (1/p!\,q!)\omega_{\mu_1\dots\mu_p}\sigma_{\nu_1\dots\nu_q}dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_p}dx_{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\nu_q} \in \Omega^{p+q}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$.
Comme $\mathrm{Tr}_\omega(\pi(\omega)|\mathcal{D}|^{-n}) = 2^{-[n/2]}\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_p})\mathrm{Tr}_\omega\left(\pi\left(\omega_{\mu_1\dots\mu_p}\right)|\mathcal{D}|^{-n}\right)$,
$\mathrm{Tr}_\omega(\pi(\omega)|\mathcal{D}|^{-n}) = \left(2^{[n/2]-n}(\pi)^{-n/2}/\Gamma(1+n/2)\right)\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_p})\int \omega_{\mu_1\dots\mu_p}$,
$\langle\pi(\omega), \pi(\sigma)\rangle = \mathrm{Tr}_\omega(\pi(\omega)\pi(\sigma)^*|\mathcal{D}|^{-n})$ est un **produit scalaire** sur $\pi(\Omega^p(\mathcal{A}))$.
Le **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ du **tore non commutatif** de **chiralité** $\boldsymbol{\gamma}$ *($\gamma^{n+1} = \gamma$ si **n** est **pair** et $\gamma = 1$ sinon)* **satisfait** à la **condition** de **fermeture** car on **obtient** :
$\forall\, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Tr}_\omega([\mathcal{D}, \pi(a_0)] \dots [\mathcal{D}, \pi(a_n)]|\mathcal{D}|^n) = 0$.
Et avec la **normalisation** de $⨍$, on a $⨍ a\,ds^n = \int a$.

- *GNC et cohomologie cyclique (Topologie)* – **Théorème local** de l'**indice**

*La **base** en GNC est une **nouvelle théorie cohomologique**, la **cohomologie cyclique**, en lien à la **K-théorie algébrique** par les **caractères** de **Chern**.*
*La **théorie** des **classes caractéristiques** des **variétés différentiables** peut s'**étendre** aux **triplets spectraux** avec la **cohomologie cyclique**. La **classe caractéristique fondamentale** dans cette **extension**, le **JLO cocycle**, **généralise** le **caractère** de **Chern**. Plusieurs **généralisations** du **théorème** de l'**indice** permettent l'**extraction effective** d'**invariants numériques issus** des **triplets**.*
On **exprime** le **caractère** de **Chern associé** au **triplet spectral** $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ avec les **résidus** $\boldsymbol{\tau_k}$. On **utilise** un **cocycle** dans le **bicomplexe (b, B)** dont la **classe** de **cohomologie cyclique périodique donne** le **caractère** de **Chern**.
Si $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ est un **triplet spectral pair** de **dimension n** et de **spectre** de **dimension discret**, $\forall\, \mathbf{p} \in [\![\mathbf{0}, \mathbf{n}]\!]$, **pair**, les **cochaînes** $\boldsymbol{\varphi_p}$ sur $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\otimes(\mathbf{p}+\mathbf{1})}$ sont :
$\boldsymbol{\varphi_0(a_0) = \tau_{-1}(\gamma a_0) = \underset{z=0}{\mathrm{Rés}}\, z^{-1}\mathrm{Tr}(b|\mathcal{D}|^{-2z})}$, $\forall\, \mathbf{p} \in [\![\mathbf{2}, \mathbf{n}]\!]$, **pair**, $\boldsymbol{\varphi_p(a_0, a_1, \dots, a_p)}$

$$= \sum_{\mathbf{k \le n-p, 0 \le q \le |k|+n/2}} \boldsymbol{\alpha_k \sigma_q(|k| + p/2)\tau_q} \begin{pmatrix} ((-1)^{\mathbf{k}}/\mathbf{k_1}! \dots \mathbf{k_p}!) \\ \boldsymbol{\gamma a_0 (da_1)^{k_1} \dots (da_p)^{k_p} |\mathcal{D}|^{-(2|k|+p)}} \end{pmatrix},$$

où $\boldsymbol{\Gamma(m+z)/\Gamma(1+z) = \sum_{i=0}^{m-1} \sigma_i(m) z^i}$ *et pour* $\boldsymbol{k = (k_1, \dots, k_p)}$, $\boldsymbol{|k| = \sum_{i=1}^{p} k_i}$,
$\boldsymbol{1/\alpha_k = (k_1 + 1)(k_1 + k_2 + 1) \dots (k_1 + k_2 + \dots + k_p + 1)}$.
*Si **p impair**,* $\boldsymbol{\varphi_p(a_0, a_1, \dots, a_p)}$

$$= \sum_{\boldsymbol{k \le n-p, 0 \le q \le |k|+n/2}} \boldsymbol{\alpha_k \sigma_q(|k| + p/2)\tau_q} \begin{pmatrix} \boldsymbol{((-1)^{k}/k_1! \dots k_p!)} \\ \boldsymbol{\gamma a_0 (da_1)^{k_1} \dots (da_p)^{k_p} |\mathcal{D}|^{-(2|k|+p)}} \end{pmatrix},$$

où $\boldsymbol{\prod_{k=0}^{m-1}(z + k + 1/2) = \sum_{i=0}^{m-1} \sigma_{m-i}(m) z^i}$.
*Pour tout **opérateur borné*** $\boldsymbol{T}$, *on **considère*** $\boldsymbol{\nabla(T) = [\mathcal{D}^2, T]}$ *et* $\boldsymbol{T^p = \nabla^p(T)}$.
Ainsi, pour $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$, **triplet spectral** de **dimension paire n** de **spectre** de **dimension discret**, pour tout $\mathbf{p} \in [\![\mathbf{0}, \mathbf{n}]\!]$, **pair**, les $\boldsymbol{\varphi_p}$ **sont** des **cocycles cycliques** du **bicomplexe (b, B)** de **classe** de **cohomologie** le **caractère** de **Chern** du **triplet spectral** $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$.

- **Construction** d'une **théorie** de l'**indice supérieur** *(Espace NC)*

Une **théorie** de l'**indice supérieur**, **découlant** du **théorème** de l'**indice longitudinal** pour les **feuilletages qui nécessitent** une **mesure transversale**, peut être **formulée** en **termes** de **K-théorie**. Mais pour **obtenir** des **indices numériques**, on doit **définir** des **invariants numériques naturels obtenus** par l'**appariement** de cette **K-théorie** avec la **cohomologie cyclique**. On doit ainsi **déterminer** l'**invariance analytique**, ou ses **propriétés** d'**annulation**, comme **élément** de la **K-théorie** d'une **C*-algèbre** et **établir** ensuite son **appariement** avec les **cocycles cycliques**.
La **conjecture** de **Baum-Connes indique** que **mapper** un **espace non commutatif** à un **espace ordinaire** est **ardu contrairement** à la **construction** des **cartes** dans le **sens inverse**, avec leur **utilisation** pour **tester** ses **propriétés homologiques**.
Liée à la **théorie** des **indices**, elle **établit** une **correspondance** entre la **K-homologie** de l'**espace** de **classification**, **liée** à la **géométrie**, à la **théorie** des **opérateurs différentiels** et à la **théorie** de l'**homotopie**.