INTRODUCTION
À LA PHYSIQUE MODERNE

Errata et compléments

Code couleur ↔ Contenant *:*

:: **Errata, compléments**

Précisions de notations *:*

- **Fonction** d'**échelon** de **Heaviside** dans les **fiches** de **TQC**

  Fonction réelle valant 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et **0** sur $\mathbb{R}_-$.
  Elle est **notée « θ »** ou **« Θ »**.

- **Vide** en **interaction** dans la **fiche TQC4** : **diagrammes de Feynman et renormalisa°**

  Notations en « **Dirac** » : $|0\rangle$: **vide sans interaction**. $|\Omega\rangle$: **vide avec interaction**.
  Dans une **théorie comportant** seulement le **champ** de **Dirac** $\psi(x)$, le **propagateur** de **Feynman** est tel que la **fonction** de **corrélation** à **deux points** du **champ** de **Dirac** est : $\left\langle 0\middle|T\left(\psi(x)\bar{\psi}(0)\right)\middle|0\right\rangle = iS_F(x) = \int(d^4p/(2\pi)^4)(ie^{-ipx}/(\not{p}-m+i\epsilon))$.
  Avec **interaction** en **QED**, introduisant la **masse renormalisée** m_R et Z_2 : **nouveau facteur** du **chp**, $\left\langle \Omega\middle|T\left(\psi(x)\bar{\psi}(0)\right)\middle|\Omega\right\rangle = \int(d^4p/(2\pi)^4)(iZ_2e^{-ipx}/(\not{p}-m_R+i\epsilon))$.
  m_r et Z_2 peuvent être **écrites** en **série** de **puissances** de **e** = $\sqrt{4\pi\alpha}$, $\hbar = c = 1$ et dans les **diagrammes** de **Feynman**, la **modification** du **propagateur** peut s'**évaluer** jusqu'à un **certain ordre** en **e** avec l'**énergie propre** du **fermion**, $\Sigma(p)$:
  $\left\langle \Omega\middle|T\left(\psi(x)\bar{\psi}(0)\right)\middle|\Omega\right\rangle = \int(d^4p/(2\pi)^4)(ie^{-ipx}/(\not{p}-m-\Sigma(p)+i\epsilon))$.
  En **identifiant** les **deux expressions** jusqu'à un **certain ordre** en **e**, on **définit** les **contre-termes annihilant** les **contributions divergentes** des **corrections** au **propagateur** de **fermions**. Les **quantités renormalisées correspondent** alors aux **valeurs mesurées**. De même, pour les **champs** de **photons** A^μ, l'**identification** s'**effectue** avec le **propagateur** de **photons défini** depuis le **champ** de **photons libres** et **celui calculé** jusqu'à un **certain ordre** en **e** avec **interaction**. La **quantité** de **mouvement** des **photons** étant **notée q**, leur **énergie propre**, $\Pi(q^2)$:
  $\langle\Omega|T(A^\mu(x)A^\nu(0))|\Omega\rangle = \int(d^4q/(2\pi)^4)(-iZ_3\eta^{\mu\nu}e^{-iqx}/(q^2+i\epsilon))$
  $= \int(d^4q/(2\pi)^4)\left(-i\eta^{\mu\nu}e^{-iqx}/\left(q^2\left(1-\Pi(q^2)\right)+i\epsilon\right)\right)$. *($\eta^{\mu\nu}$: tenseur métrique).*
  *Dans les **fiches TQC**, les **contre-termes** des Z_k, $k \in [\![0,3]\!]$ sont : $\delta Z_k = Z_k - 1$.*

- **Expression** des **6j** *(symboles de Wigner)* en **fonction** des **3j** : $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} =$

$\sum_{m_1,m_2,\dots,m_6}(-1)^{\sum_{k=1}^{6}(j_k-m_k)}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix}\dots$
$\dots\begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix}.$

- $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. **Repr**. de **Dirac** : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de **Weyl** : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Flot géodésique**

  Pour une **variété** V, $(x, v) \in TV$, **de norme 1**, l'**unique géodésique** de V g: $\mathbb{R} \to V$ telle que $g(0) = x$ et $g'(0) = v$, **parcourue** à **vitesse constante 1**, le **flot géodésique** φ est **défini** par $\varphi\big(t, (x, v)\big) = \big(g(t), g'(t)\big)$.

Fiche TQC2 – Analyse canonique

- **Opérateurs** de **création** et d'**annihilation**

  Les **opérateurs** de **création** sont des **opérateurs agissant** sur l'**espace** de **Fock** qui **changent un état** à **n particules** en **un autre** à **n + 1 particules**. Les **opérateurs** d'**annihilation** sont des **opérateurs agissant** sur l'**espace** de **Fock** qui **changent un état** à **n particules** en **un autre** à **n – 1 particules si n ≥ 1**.

Opérateurs de **création**, $\psi^\dagger : V_n \to V_{n+1}$, $\psi^\dagger(x)|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = |x, x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$.
Son **adjoint**, ψ, est l'**opérateur** d'**annihilation**, tel que $\psi : V_n \to V_{n-1}$.
Pour $\langle y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\rangle|\psi(x)|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle\rangle = \langle x, y_1, y_2, \dots, y_n|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$
$\langle y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\rangle|\psi(x)|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle\rangle = \langle y_1, y_2, \dots, y_n, x|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$
$= \sum_{p\in S_n}\delta\big(y_1 - x_{p(1)}\big)\dots\delta\big(y_1 - x_{p(1)}\big)\delta\big(x - x_{p(1)}\big)$
$\langle y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\rangle|\psi(x)|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n}\delta(x - x_i)\,\langle y_1, \dots, y_{n-1}|x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n\rangle$
$|x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n\rangle$ *est* $|x_1, \dots, x_n\rangle$ *sans* x_i *en* $i^{\text{ème}}$ *position.*
$\psi^\dagger(x)|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = |x, x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$.
D'où les **relations** de **commutation** : $[\psi(x), \psi(y)] = 0$, $[\psi(x), \psi^\dagger(y)] = \delta(x - y)$.
Pour $\langle y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\rangle|\psi(x)|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle\rangle = (-1)^{n+1}\langle y_1, y_2, \dots, y_n, x|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$
$\langle y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\rangle|\psi(x)|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle\rangle = (-1)^{n+1}\sum_{p\in S_n}\varepsilon_p\delta\big(y_1 - x_{p(1)}\big)\dots\delta\big(y_1 - x_{p(1)}\big)\delta\big(x - x_{p(1)}\big) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\delta(x - x_i)\,\langle y_1, \dots, y_{n-1}|x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n\rangle$.
$|x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n\rangle$ *est* $|x_1, \dots, x_n\rangle$ *sans* x_i *en* $i^{\text{ème}}$ *position.*
$\psi^\dagger(x)|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = |x, x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$.
D'où les **relations** d'**anticommutation** : $\{\psi(x), \psi(y)\} = 0$, $\{\psi(x), \psi^\dagger(y)\} = \delta(x - y)$.

Pour les **bosons**, l'**opérateur** de **création**, $\hat{a}_i^{\dagger}$, **générant** une **particule** dans l'**état i** est tel que : $\hat{a}_i^{\dagger}|N_1, \dots, N_i, \dots\rangle = \sqrt{N_1 + 1}|N_1, \dots, N_i + 1, \dots\rangle$. Par **commutation** $[\hat{a}_i^{\dagger}, \hat{a}_j^{\dagger}] = 0$, on **obtient** alors les **états normalisés** de l'**espace** de **Fock** : $|N_1, N_2, \dots\rangle = \prod_i \left(1/\sqrt{N_i!}\right)\left(\hat{a}_i^{\dagger}\right)^{N_i}|0\rangle$.
Pour les **fermions**, le **principe** d'**exclusion** de **Pauli** rend **impossible** la **création** *(**opérateur** : $\hat{c}_i^{\dagger}$)* de **deux fermions** dans le **même état**, $\left(\hat{c}_i^{\dagger}\right)^2 = 0$, $\{\hat{c}_i^{\dagger}, \hat{c}_j^{\dagger}\} = 0$ et $\hat{c}_i^{\dagger}|N_1, \dots, 0, \dots\rangle = |N_1, \dots, 1, \dots\rangle$ *(**0** et **1** en **i**ème **position**)*, on **obtient** alors les **états normalisés** de l'**espace** de **Fock** : $|N_1, N_2, \dots\rangle = \prod_k \left(\widehat{c_{I_k}}^{\dagger}\right)^{N_{I_k}}|0\rangle$.
L'**anticommutation implique** le **choix** d'un **ordre** d'**action** des **opérateurs** de **création** *(dans les **produits**)*. Un **opérateur** de **création** est **conjugué hermitique** d'un **opérateur** d'**annihilation** et **inversement**. **...**

- **Principe classique** des **moindres contraintes** de **Gauss**

  Il permet de **traiter** les **contraintes non holonomes**, par l'**introduction** de **contraintes modifiant** le **moins possible** le **mouvement** d'un **système initialement libre**.
  <u>Exemple</u> : **système** de **n points** *(**indices i**)* de **masse** m_i, **soumis** à des **contraintes**.
  On pose $\ddot{q}^i$: **composante** de l'**accélération réelle** *(**sous contraintes**)* et F_i/m_μ : **composante** de l'**accélération** qu'aurait le **point** μ de **masse** m_μ **sans contraintes**.
  Le **principe stipule** que le **mouvement réel correspond** à la **minimalisation** de la **fonction** $\sum_{i=1}^{3n} m_\mu\left(\ddot{q}^i - F_i/m_\mu\right)^2$. **...**

- **Théorème** de **Wick** **(Wick) ...**

  L'**extension** de **Dyson** s'**écrit** *(**T impose** l'**ordonnancement**, **N** laisse **libre** les **produits**)*:
  $\hat{S} = T\left[\exp - i\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} d^4x\widehat{\mathcal{H}}_I(x)\right]$ *(← **forme exponentielle** de **Dyson**)*
  Développement en **série** de **Dyson** :
  $\hat{S} = T\left[1 - i\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} d^4w_1\widehat{\mathcal{H}}_I(w_1) + ((-i)^2/2!)\int d^4w_2d^4w_3\widehat{\mathcal{H}}_I(w_2)\widehat{\mathcal{H}}_I(w_3) + \cdots\right]$.

- **Explicitation** du **Théorème** de **Wick** pour le **champ** ϕ.

  $T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] = N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] + \sum_{contractions\ de\ paires} N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}]$

  $\langle 0|T[\hat{A}(x)\hat{B}(y)]|0\rangle = \begin{cases}\langle 0|\hat{A}^-(x)\hat{B}^+(y)|0\rangle, \text{si } x^0 > y^0 \\ \langle 0|\hat{B}^-(y)\hat{A}^+(x)|0\rangle, \text{si } y^0 > x^0\end{cases}$. Et on a $N[\phi(x_1)\phi(x_2)]$
  $= \phi^+(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^-(x_2) + \phi^+(x_1)\phi^-(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^+(x_2)$, pour :
  $\phi = \phi^+ + \phi^-$, avec ϕ^+ : **partie** de **création**, ϕ^- : **partie** d'**annihilation**.
  $T[\phi(x_1)\phi(x_2)] = \phi^+(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^-(x_2)$
  $+\theta(t_1 - t_2)\left(\phi^+(x_1)\phi^-(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^+(x_2)\right)$
  $+\theta(t_2 - t_1)\left(\phi^+(x_2)\phi^-(x_1) + \phi^-(x_2)\phi^+(x_1)\right)$. *(**T** : **temps ordonné**)*

...