Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Etude** de l'**évolution** d'une **variable** de valeur initiale **nulle** et évoluant à chaque **étape** de façon **équiprobable** de **+1** ou bien de **– 1**. Une **modélisation** possible est la suite **x** de relation de récurrence : $\mathbf{x_{n+1} = x_n + 2 \times E(rnd(2)) - 1}$: **(R)**, avec $\mathbf{x_0 = 0}$, ***E** est la fonction **partie entière** et **rnd(2)** est un **réel aléatoire** de **]0, 2[**.*
  Soit **X** variable aléatoire valeur de $\mathbf{10 + x_N / 2}$ et **p(X = k)** : **probabilité** de $\mathbf{x_N = 2k - 20}$
  Le programme ci-dessous établit **10 essais** de **1000 répétitions** de séries $\mathbf{x_{i \in [\![0, N=20]\!]}}$:
  Pour ces **boucles** de **N étapes**, partant de $\mathbf{x_0 = 0}$ et évoluant chaque fois de **+1** ou **–1**, la **position finale** $\mathbf{x_N}$ est à *valeur* dans :
  {-N ; -N + 2 ; … ; 0 ; 2 ; … ; N} si N pair,
  {-N ; -N + 2 ; … ; 1 ; 3 ; … ; N} si N impair.

```python
from pylab import *

essai = 0
while essai < 10:
    j, x, y, z = 0, 0, 0, 0
    compteur = zeros((21, 1))
    while j < 1000:
        x = 0
        import random
        for i in range(1, 21):
            r = random.random()
            s = 2 * int(2 * r) - 1
            x += s
        y = 10 + x * 0.5
        z = round(y)
        compteur[z] += 1
        j += 1
    for k in range(21):
        print int(round(compteur[k])),
    print
    essai += 1
```

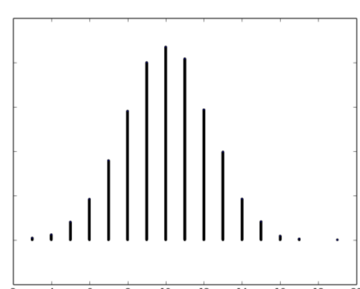
  Et, ayant $\binom{\mathbf{N}}{\mathbf{k}}$ **combinaisons** de **k étapes** dont l'évolution est **+ 1** *(les **n – k** autres évoluant nécessairement de -**1**)* parmi **N**, la **loi** est **binomiale** : $\mathcal{B}$ **(20 ; 0,5)** et comme la somme de ces parties est $\mathbf{2^N}$ *(également **nombre de possibilités** de **N étapes** de **2 évènements équiprobables**)* $\mathbf{p(X = k) = \binom{N}{k}/2^N}$. *Ainsi, par exemple :*
  $\underline{x_N = 0}$: $p(X = 10) = \binom{20}{10}/2^{20} \approx 17{,}62\,\%$
  $\underline{x_N = 4}$: $p(X = 6) = p(X = 14) = \binom{20}{4}/2^{20}$.

k :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0	0	0	1	3	18	46	72	124	154	183	161	102	71	44	14	5	0	1	1	0
	0	0	0	0	4	20	32	65	110	165	188	155	108	90	40	20	1	1	1	0	0
	0	0	0	1	4	17	35	92	114	166	183	136	112	67	53	15	4	1	0	0	0
	0	0	0	2	5	11	32	75	121	168	165	162	114	90	38	9	8	0	0	0	0
	0	0	0	3	9	21	28	64	103	165	180	171	126	70	39	18	2	1	0	0	0
	0	0	0	1	2	22	39	78	114	160	181	146	128	72	40	10	6	1	0	0	0
	0	0	0	1	9	18	24	78	117	171	166	155	123	72	36	21	8	1	0	0	0
	0	0	0	2	3	16	34	65	120	172	184	135	118	93	35	14	5	3	0	1	0
	0	0	0	2	4	17	22	77	130	167	176	138	127	77	34	22	4	3	0	0	0
	0	0	1	1	2	13	47	85	117	155	187	173	114	60	28	13	3	1	0	0	0

10 essais de 1000 occurrences pour N = 20

Exemple de graphe pour 5000 occurrences

*(Cf. **théorème** de **Moivre – Laplace**)*



- **Calculs** de **fonctions génératrices** G_X puis des **variances** de **variables aléatoires X** *(Cf. (Fgén), (P.discr) et lois correspondantes) Les* G_X *pour ces lois étant* $C^2(Déf(G_X))$.

  Loi de Bernoulli :
  $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = (1 - p).1 + p.t = 1 - p + pt$. $G_X'(t) = p$, $G_X''(t) = 0$.

  Loi Binomiale :
  $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}(pt)^k = (1 - p + pt)^n$.
  $G_X'(t) = np(1 - p + pt)^{n-1}$, $G_X''(t) = n(n - 1)p^2(1 - p + pt)^{n-2}$.
  Loi de Poisson :
  $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}(\lambda t)^k/k! = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda t)^k/k! = e^{\lambda(t-1)}$.
  $G_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$, $G_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$.
  Loi géométrique : $0 < p < 1$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1/(1-p)$
  $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}t^k = (p/1-p)\sum_{k=0}^{+\infty}((1-p)t)^k = pt/(1+(p-1)t)$.
  $G_X'(t) = (p(1+(p-1)t) - p(p-1)t)/(1+(p-1)t)^2 = p/(1+(p-1)t)^2$,
  $G_X''(t) = -2p(p-1)/(1+(p-1)t)^3$.

  Montrer que pour des **fonctions génératrices deux fois dérivables** en **1**, la **variance**, $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$. En déduire les **variances** pour chacune de ces **lois**.

- **1. Dénombrement 1**

  Soit **E** et **F** ensembles de nombres distincts, de **cardinaux** respectifs $p, n \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n$. Prouver que le **nombre** des **applications strictement croissantes** de $E \to F$ est $\binom{n}{p}$ et **celui** des **applications croissantes** de $E \to F$ est $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p-k}\binom{p}{k} = \binom{n+p}{p}$.

- **2. Dénombrement 2**

  Soit Γ_p^n le nombre de **combinaisons** de **p** éléments éventuellement répétés choisis parmi $n \in \mathbb{N}^*$ éléments *(p < n)*. On dispose de **p** objets à placer dans **n** rangements (éventuellement plusieurs par rangement). Pour **n** = **10**, écrire en **code bits** deux objets dans le 3ème rangement, un dans le 5ème et trois dans le 9ème.
  <u>Exemple</u> : Pour 5 rangements, 2 objets dans le 3ème et 1 dans le 5ème s'écrit : 001101.
  Déduire le nombre Γ_6^{10} puis **généraliser** pour $n \in \mathbb{N}^*$ à Γ_p^n. Montrer que le **nombre** de **p-uplets** $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ $(x_i \in \{0, 1\})$ **solutions** de l'équation $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$ est Γ_p^n.

- **3. Dénombrement 3**

  Soit **E = {1 ; 2 ; ... ; n}**. Donc **Card (E)** = $n \in \mathbb{N}^*$. Un **dérangement** de tout ensemble F_p de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ est une **permutation** pour laquelle aucun des **p** éléments permutés d'un **p-uplet** *(ensemble de p éléments)* de F_p n'est à la même place.
  <u>Exemple</u> : d : $F_3 \to F_3$ avec $F_3 = \{a_1 ; a_2 ; a_3\}$ et d : $(x, y, z) \longmapsto (y, z, x)$.
  Soit D_p le **nombre** de ces **dérangements** pour un ensemble F_p de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$.
  Déterminer D_1, D_2, D_3.
  Combien y a-t-il de **permutations** de **E** laissant **invariants** exactement $k \leq n$ **éléments** ? En déduire que $n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$ puis déterminer D_4 et D_5.