

Fluides

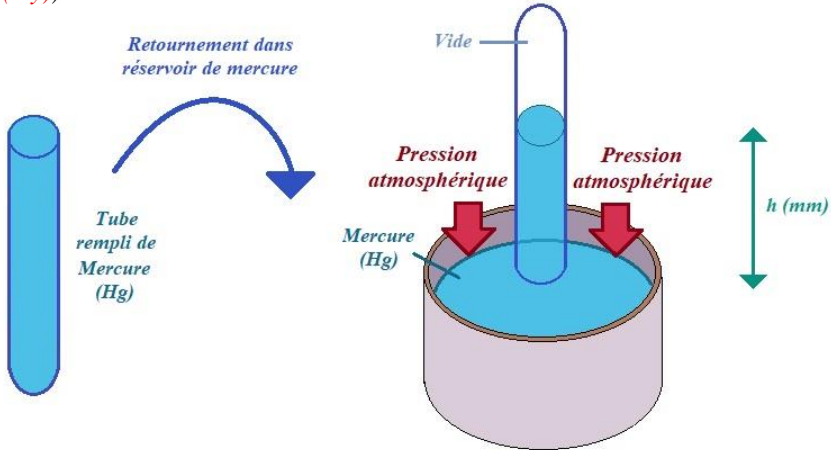
Fiche P6 – Statique des fluides

Définitions et variables

- Un **fluide** est un **gaz** (*très compressible aux conditions de température et pression usuelles*) ou un **liquide** (*peu compressible à ces conditions*).
- La **masse volumique** en un point d'un **fluide** est $\rho = \frac{dm}{dV}$ et si **homogène**, $\rho = \frac{m}{V}$.
- La **densité** d'un fluide est $d = \rho / \rho_{\text{eau}}$, avec $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg.m}^{-3} = 1 \text{ kg.L}^{-1}$.
- La **pression** P sur l'élément de surface $d\vec{S}$ d'un corps vérifie $d\vec{F}_{\text{ext}} = -P d\vec{S}$.
→ La **force de pression** du **fluide** sur une de ses **particules** est toujours **dirigée orthogonalement** à sa **surface de séparation** et **vers son intérieur**.
Soit : $\mathbf{P} = d\mathbf{F}_{\perp} / dS$ et $\mathbf{P} = \mathbf{F}_{\perp} / S$ pour une **force uniforme** sur S : (Pf)
- **Objet solide dans un fluide immobile**
 - Le **volume** V et la **masse** m des objets ont un caractère **extensif** : ils sont la somme de leurs **éléments constitutifs**. Soit :
 $V_{\text{objet}} = \sum \delta V$, ou encore $V_{\text{objet}} = \iiint dV_{\text{objet}}$.
 $m_{\text{fluide}} = \sum \delta m$, ou encore $m_{\text{fluide}} = \iiint_{\text{fluide}} dm_{\text{fluide}}$.
Pour un **élément**, $dm_{\text{élément}} = \rho_{\text{élément}} \cdot dV_{\text{élément}}$
→ $m_{\text{fluide}} = \iiint \rho_{\text{fluide}} dV_{\text{fluide}}$. Et de même, $m_{\text{objet}} = \iiint \rho_{\text{objet}} dV_{\text{objet}}$.
 - Le **centre de poussée** C sur un **objet immergé** est le **centre d'inertie** qu'aurait le fluide à la place du **volume immergé** → $\vec{OC} = \frac{1}{m_{\text{fluide}}} \iiint \rho_{\text{fluide}} \vec{OM} dV_{\text{immergé}}$.
 - **Rappels** :
 - . **Centre d'inertie** G d'un objet : $\vec{OG} = \frac{1}{m_{\text{objet}}} \iiint \rho_{\text{objet}} \vec{OM} dV_{\text{objet}}$.
 - . **Moment** (élément) en G : $\vec{M}_G = \iiint_{\text{élt}} \rho_{\text{élt}} (\vec{GM} \times \vec{f}_{\text{ext}}) dV = \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} : (\vec{O'})$

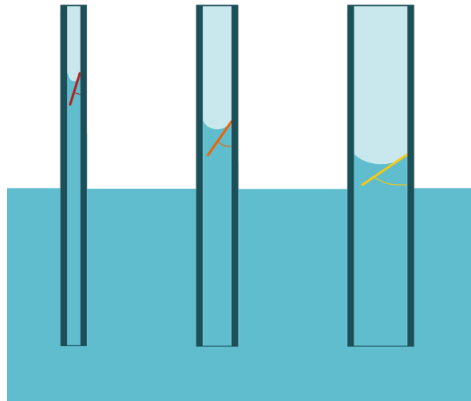
Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Expérience de Toricelli.** $h \approx 760 \text{ mm}$ aux conditions atmosphériques normales. (Cf. (Hy)).



- **Capillarité** dans des tubes

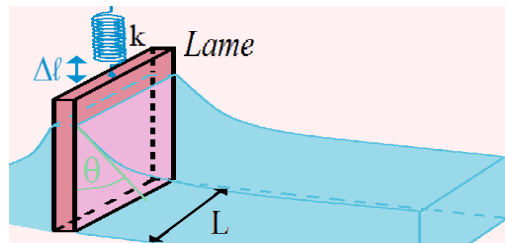
On observe une **hauteur de remontée** d'eau d'autant plus **grande** et un **angle de contact** au point de **raccordement** des **trois phases** (eau, air, verre) d'autant plus **proche de 0°** que le **rayon du tube est petit**. (Cf. (Ju)).



- **Mesure de γ** avec un **tensiomètre**

La lame en platine est stabilisée pour une **elongation du ressort** de raideur k . Ainsi, les **forces, surfacique du liquide** et celle due au **ressort, s'équilibrent**.

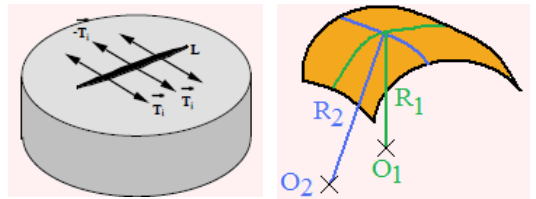
(PFD), (Ts) $\rightarrow F = k\Delta\ell = 2\gamma L \cos \theta$.
 \rightarrow Pour $\cos \theta \approx 1$, $\gamma = k\Delta\ell / 2L$



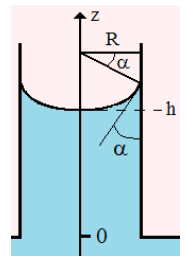
Formules, propriétés

- $\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{f}$ (\vec{f} champ de l'espace) : équation de l'hydrostatique.
 Soit pour un **fluide immobile** dans un **champ de pesanteur**, $\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$: (Hy)
 et $\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g} + \vec{f}_i$: (Hy'), pour un fluide soumis à des **forces d'inerties** \vec{f}_i .**
- Poussée d'Archimède** : force qui s'applique en **C**, **verticale**, de **bas en haut** et due au gradient de pression du fluide entourant le volume immergé de l'objet :
 (Hy) $\rightarrow \vec{\pi} = - \iiint \rho_{\text{fluide}} \vec{g} dV_{\text{immergé}}$. Fluide uniforme, $\vec{\pi} = - \rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergé}} \vec{g}$: (π)
- Tension superficielle d'un liquide – Loi de Laplace** : $\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$: (La)

Tendant à réduire la surface, la tension superficielle est γ (ou « σ ») = $\frac{T_i}{L}$ et l'énergie correspondante est $E = \gamma S$.



- Loi de Jurin** (montée d'un liquide de tension superficielle γ)
 h : hauteur d'ascension capillaire, R : rayon du tube,
 α : angle de contact au point de raccordement des trois phases.
 (Hy), (La) \rightarrow Ascension capillaire : $h = \frac{2\gamma \cos(\alpha)}{\rho g R}$: (Ju)



- Tensions de surface, interfaces solide (S) – liquide (L) - air (A) : (Ts)**

Exemple : goutte d'eau sur plan horizontal.

θ : angle de contact, $\theta_r \leq \theta \leq \theta_a$,
 γ : tension superficielle interfaciale.

Élément de force : $dF = \gamma dL$,

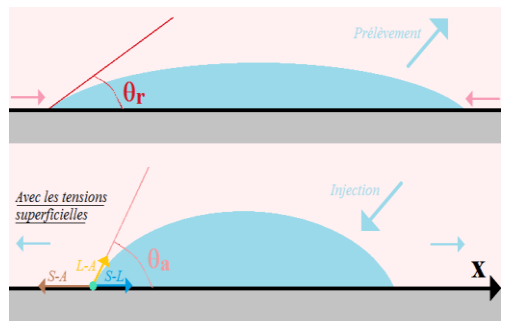
avec le potentiel de surface :

$U_\gamma = \iint \gamma dS$ tendant à réduire S.

Équilibre sur le plan $\rightarrow \sum \vec{F}_{Ox} = \vec{0}$.

\rightarrow **Relation de Young** :

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{S-A} - \gamma_{S-L}}{\gamma_{L-A}}$$



Exercices d'application et grands classiques

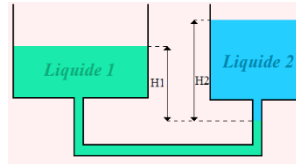
Énoncés :

▪ **1. Objet de masse m dans un fluide statique non visqueux**

Exprimer la **flottaison**, la **submersion** et le **roulis** de l'objet à la surface de l'eau en ne considérant que la **poussée d'Archimède**.

▪ **2. Manomètre différentiel**

Exprimer la **relation** entre ρ_1 , H_1 , ρ_2 et H_2 des deux liquides.

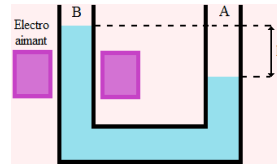


▪ **3. Récipient cylindrique, tournant suivant son axe Oz et rempli d'eau**

Montrer que la **surface** de l'eau contenue dans le récipient tournant à la vitesse de rotation ω a pour **équation** en coordonnées cylindriques : $z = z_c + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$.

▪ **4. Mesure de la susceptibilité magnétique** d'un fluide de masse volumique ρ avec un électroaimant de champ magnétique B .

Montrer que la **susceptibilité magnétique** du fluide est : $\chi = \frac{2\mu_0\rho gh}{B^2}$.



▪ **5. Pression d'équilibre d'une étoile homogène (de centre O et rayon R)**

En utilisant le **théorème de Gauss** pour la **gravitation**, $\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi Gm(r)$, où \vec{g} est le **champ gravitationnel** et m la **masse intérieure** en $r \leq R$ (m : masse de la boule de centre O et rayon r , ρ : masse volumique constante), exprimer $\vec{g}(r)$ et en déduire la **pression P** à l'intérieur de l'étoile.

▪ **6. Atmosphère (Cf. fiche P22 – Thermodynamique)**

Déterminer à l'**altitude z** , pour un modèle **isotherme**, en considérant l'accélération de la pesanteur constante, $\mathbf{g} = g_0 : \rho(z)$ et montrer que $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{air}}g_0}{RT}z\right)$.

En considérant l'**évolution** de g avec z , (**Acc.p**), déterminer $P(z)$.

Montrer pour un modèle **adiabatique** avec $g = g_0$, $P(z) = [P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \rho_0 g P_0^{\frac{-1}{\gamma}} \cdot z]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$.

Corrigés :

- 1. **Objet de masse m dans un fluide statique non visqueux** (Cf. (PFD)) :

Flottaison : $(\pi) \rightarrow m\vec{g} = -\vec{\pi} = \iiint \rho_{\text{fluide}} \vec{g} dV_{\text{immergé}} \rightarrow \iiint \rho_{\text{fluide}} dV_{\text{immergé}} = m.$

Submersion : $m\vec{z} = -m\vec{g} + \vec{\pi}(t)$ (ou $\pi(z(t))$).

Roulis : $(\vec{0}) \rightarrow I_{\text{objet}} \ddot{\theta} \vec{e}_y = \vec{GC} \times \vec{\pi}(t) + \vec{M}_{\text{Frottements}}.$

- 2. **Manomètre différentiel**

(Hy) $\rightarrow P_0 + \rho_1 g H_1 = P_0 + \rho_2 g H_2.$ Soit $\rho_1 H_1 = \rho_2 H_2.$

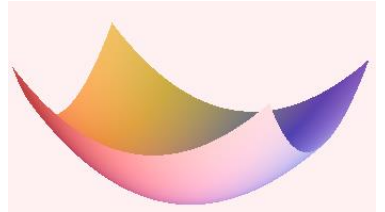
- 3. **Récipient cylindrique tournant suivant son axe** et rempli d'eau

$\int_C^M (\text{Hy}') d\vec{l}$ avec C et M sur la surface de l'eau,

C sur l'axe de rotation, $\vec{f}_{ie} = -\frac{1}{2} r \omega^2 \vec{u}_r.$

et $P_0 = 10^5 \text{ Pa} \rightarrow P_0 + \rho g z_c = P_0 - \frac{\rho}{2} \omega^2 r^2 + \rho g z.$

\rightarrow Surface d'équation : $z = z_c + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \rightarrow$



- 4. **Mesure de la susceptibilité magnétique d'un fluide**

(Hy') avec $e_p = \frac{\chi}{2\mu_0} B^2, \vec{\nabla} e_p = \frac{\chi}{2\mu_0} \vec{\nabla} B^2$

$\rightarrow P_B - P_A = \int_A^B \vec{\nabla} P \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{\nabla} (-\rho g z + \frac{\chi}{2\mu_0} B^2) d\vec{l}.$

Et comme $P_B = P_A = 10^5 \text{ Pa}$, la pression atmosphérique égale en A et en B,

la susceptibilité magnétique du fluide est : $\chi = \frac{2\mu_0 \rho g h}{B^2}.$

- 5. **Pression d'équilibre d'une étoile**

En considérant sa masse volumique ρ constante de r , la distance à son centre.

Pour $r \leq R$ (R : rayon de l'étoile),

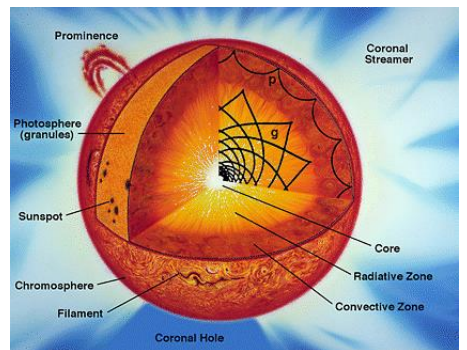
à l'intérieur de l'étoile, le théorème

de Gauss s'écrit $\iiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m(r),$

soit $\vec{g} = g(r) \vec{u}_r, 4\pi r^2 g(r) = -4\pi G \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$

$\rightarrow \vec{g} = -\frac{4}{3} \pi G \rho r \vec{u}_r.$ Avec $P(R) = 0,$

(Hy) $\rightarrow P(r) = \frac{2}{3} \pi G \rho^2 (R^2 - r^2).$



public domain

▪ 6. Atmosphère

(Hy) $\rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho(z)g(z)$

et $P(0) = P_0 = 1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$.



public domain

➤ **Modèle isotherme**

Air : gaz parfait isotherme, (GP) $\rightarrow \rho(z) = \frac{PM_{\text{air}}}{RT} \rightarrow P = P_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{air}}g_0}{RT}z\right)$

On vérifie pour $g(z) = g_0$, $P(0) = P_0$ et $\lim_{z \rightarrow +\infty} P(z) = 0$.

$\rightarrow \rho(z) = \frac{M_{\text{air}}}{RT} \exp\left(-\frac{M_{\text{air}}g_0}{RT}z\right) = \rho_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{air}}g_0}{RT}z\right)$.

En considérant (Ac.p) : $g(z) = \frac{g_0}{(1+z/R_T)^2}$, $P = P_0 \exp\left(\frac{M_{\text{air}}g_0 R_T}{RT(1+z/R_T)} - \frac{M_{\text{air}}g_0 R_T}{RT}\right)$

On vérifie $P(0) = P_0$ et $\lim_{z \rightarrow +\infty} P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{air}}g_0 R_T}{RT}\right)$.

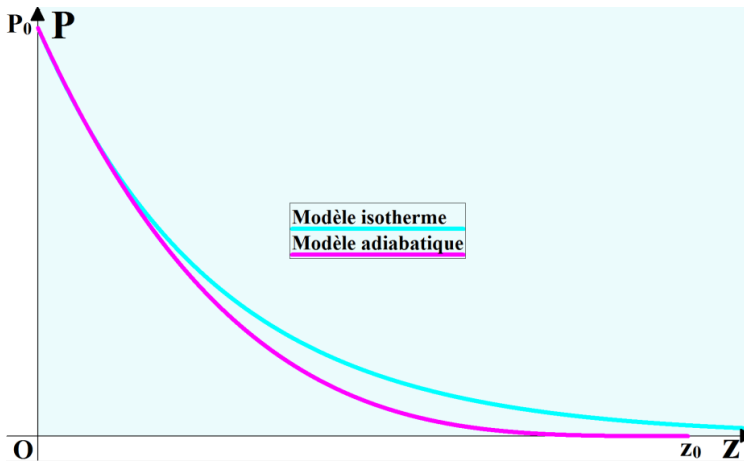
➤ **Modèle adiabatique**

(Laplace) : $P\rho^{-\gamma} = \text{cste} \rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho_0 g_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma}$. On prend $g(z) = g_0$.

$\rightarrow P(z) = \left[P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \rho_0 g_0 P_0^{\frac{-1}{\gamma}} \cdot z\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ qui s'annule en $z_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0 g_0}$.

$\rightarrow \rho(z) = \rho_0 \left[1 + \frac{1-\gamma}{\gamma} \rho_0 g_0 P_0^{-1} \cdot z\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$.

Avec $M_{\text{air}} = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\gamma = 1,4$:



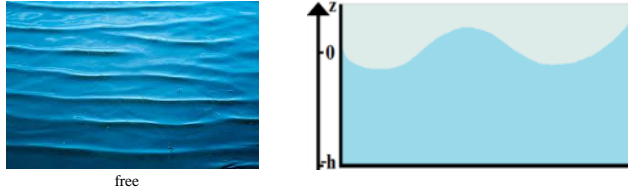
Fiche P7 – Dynamique des fluides

Définitions et variables

- **Particule de fluide. Mésooscopique** : assez **petite** pour que le fluide soit décrit comme un milieu continu et assez **grande** pour que l'agitation thermique de ses particules n'influe que de façon négligeable sur sa quantité de matière.
- **Dérivée particulaire** pour $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\vec{r}, t)$: $\frac{D\mathbf{X}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \mathbf{X}$.
- **Description lagrangienne** : on suit une **particule** du **fluide** dans son **évolution** : $\vec{R} = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t))$. La **vitesse** de cette particule est $\frac{D\vec{R}}{Dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$.
- **Description eulérienne** : on observe l'**ensemble** du **fluide** et on identifie le **champ** des **vitesse**s $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ou celui de la **masse volumique** $\rho(\vec{r}, t)$.
- **Passage entre les deux descriptions** : $\frac{dx}{v_x(\vec{r}, t)} = \frac{dy}{v_y(\vec{r}, t)} = \frac{dz}{v_z(\vec{r}, t)} = dt$.
- **Ligne de courants L à t_0** : **courbe** $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ à laquelle $\vec{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t_0)$ est **tangent** en tout point : $\mathbf{L} : \frac{dx}{v_x(\vec{r}, t_0)} = \frac{dy}{v_y(\vec{r}, t_0)} = \frac{dz}{v_z(\vec{r}, t_0)} : (0)$
- **Caractère d'un fluide** : pour chacune des particules le composant.
- **Caractère d'un écoulement** : pour chaque particule lors de son évolution.
- **Fluide parfait** : **fluide** dont on **néglige** les effets de **viscosité** et de la **chaleur**.
- **Incompressibilité** : $\rho(\vec{r}, t) = \text{cste}$. Soit, en représentation **lagrangienne** : $\frac{D\rho}{Dt} = 0$.
- **Densité de courant de masse** : $\vec{j} = \rho \vec{v} : (j)$
- **Débit volumique D_v** (ou « Q_v ») à travers une **section** $d\vec{S}$: $dD_v = \vec{v} \cdot d\vec{S}$, à travers **S** : $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$, et si **uniforme** : $D_v = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} : (0'')$
- **Débit massique D_m** : $dD_m = \vec{j} \cdot d\vec{S} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$. **Débit massique uniforme** : $D_m = \rho \mathbf{S}_\perp \cdot \mathbf{v}$
Débit massique dans un tube de section \mathbf{S}_\perp : $D_m = \iint \rho(\mathbf{r}_\perp) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_\perp) \cdot d\mathbf{S}_\perp : (0''')$
- **Vecteur tourbillon** : $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}(\vec{v})}$. Pour un **fluide irrotationnel**, $\vec{\Omega} = \vec{0}$.
- $\vec{v}(M') = \vec{v}(M) + \vec{D} + \vec{\Omega} \times \overline{MM'}$, \vec{D} : **vecteur déformation**.
- **Circulation Γ** = $\int \vec{v} \cdot d\vec{l} \rightarrow$ Pour une **courbe fermée C** entourant **S** et **orientée positivement** par rapport à \vec{S} : $\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overline{\text{rot} \vec{v}} \cdot d\vec{S} = 2 \iint_S \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} : (0^{iv})$
- La **viscosité** traduit les **frottements** entre les **couches** du fluide en mouvement.

Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Houle** dans une **cuve parallélépipédique** d'un **fluide incompressible, irrotationnel**



Houle (onde plane) de l'eau dans la cuve parallélépipédique de **faible profondeur h** , avec visualisation de l'excitation (nécessairement de même fréquence) à l'oscilloscope. Le **fluide** (eau liquide) est considéré **irrotationnel**, soit $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$, ce qui implique que l'on peut écrire \vec{v} en fonction d'un potentiel scalaire $\varphi(\vec{r}, t)$:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\nabla} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \text{ en coordonnées cartésiennes.}$$

De plus on considère le fluide **incompressible**, donc $\frac{D\rho}{Dt} = 0$.

La **houle** se propage **rectilignement** suivant **Ox**. *Vecteur d'onde de norme $k = 2\pi/\lambda$*
 $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \exists \varphi(\vec{r}, t)$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\nabla} \varphi$. La conservation de la masse implique alors :
 $\text{div}(\vec{v}) = \text{div}(\overrightarrow{\nabla} \varphi) = \Delta \varphi = 0 : \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$. \rightarrow On résoud :

$\varphi(x,y,z,t) = f(z) \cos(\omega t - kx)$ avec $f(z) = a e^{kz} + b e^{-kz}$, où **a, b** sont des constantes car :

$$\Delta \varphi(x,y,z,t) = (a e^{kz} + b e^{-kz}) \frac{\partial^2 \cos(\omega t - kx)}{\partial x^2} + \cos(\omega t - kx) \frac{\partial^2 (a e^{kz} + b e^{-kz})}{\partial z^2} = (k^2 - k^2) \varphi$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{\nabla} \varphi \rightarrow v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ et au fond, } v_z(x,y, -h,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y, -h,t) = 0 \rightarrow a = b e^{2kh}.$$

$\rightarrow f(z) = A \cosh k(z+h)$. La **surface** est définie par $z = \xi(x,y, t) \ll h$, alors

$$v_z(x,y, z,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ et } (\vec{E}) \text{ s'écrit } \rho \frac{\partial \overrightarrow{\nabla} \varphi}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}(\rho g \xi) = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{\nabla}(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g \xi) = \vec{0},$$

puis $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \xi = \text{cste}$. \rightarrow En dérivant $\forall(x,t)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$. Alors,

$$-\omega^2 \cosh(kh) + g \sinh(kh) = 0, \text{ soit : } \omega^2 = k g \tanh kh : \text{ relation de dispersion de l'onde.}$$

. Les variables de temps et d'espace étant indépendantes, on peut intervertir $\partial/\partial t$ et $\overrightarrow{\nabla}$

. Fréquence de battements nécessaires pour obtenir $\lambda = h = 1 \text{ m} : f \approx 0,8 \text{ Hz}$.

. En tenant compte de la tension superficielle de l'eau (de constante γ) dans (\vec{E}) , on obtient comme relation de dispersion (rides capillaires) :

$$\omega^2 = k(g + \gamma(k^2 / \rho_{\text{eau}})) \tanh kh.$$

. En considérant (La), la surpression à la surface est γ/R , avec $1/R = \partial^2 \xi / \partial x^2$.

Formules, propriétés

- Conservation de la matière

- locale : $\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$: (Cm) car $\forall V$,

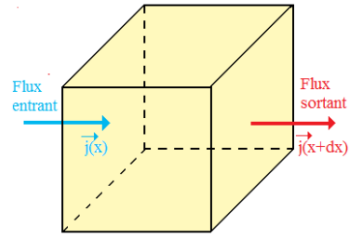
$$\iiint_V \text{div}(\vec{j}) dV = \oiint_S \vec{j} d\vec{S} = \phi = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Avec (\vec{j}) , cette conservation s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) = 0, \text{ soit : } \frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) = 0 : (\text{Cm}')$$

Pour un fluide **incompressible**, $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ et donc $\text{div}(\vec{v}) = 0$: (Cm'')

- globale : $D_m = \text{cste}$ et si fluide **incompressible**, également $D_v = \text{cste}$: (Cm''')



- Types de fluides ou d'écoulements

. **Fluide** ou écoulement **irrotationnel** : $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$.

$\Rightarrow \exists \varphi(\vec{r}, t)$, fonction scalaire, « potentiel des vitesses » telle que $\vec{v} = \nabla \varphi$: (2')

Équipotentielles à $t = t_0$: $\varphi(\vec{r}, t_0) = \text{cste}$.

. **Fluide** ou écoulement **incompressible** : $\text{div}(\vec{v}) = 0$.

$\Rightarrow \exists \vec{\psi}(\vec{r}, t)$ fonction vectorielle « de courant » telle que $\vec{v} = \text{rot}(\vec{\psi})$: (2'')

Lignes de courant à $t = t_0$: $\vec{\psi}(\vec{r}, t_0) = \text{cste}$.

. **Exemple** d'un écoulement **plan** dans (xOy), $\vec{v} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$

$$\rightarrow L : \frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \rightarrow d\psi = 0, \text{ soit } \psi = \text{cste} \text{ le long de } L.$$

Et $\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \psi \cdot \nabla \varphi = 0$: *lignes de courant et équipotentiell*es sont **orthogonales**.

. **Potentiel complexe** : $f = \varphi + i\psi$: (Pc). $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow f$ est une f° de $z = x + iy$.

. **Fluide visqueux** : pour un fluide

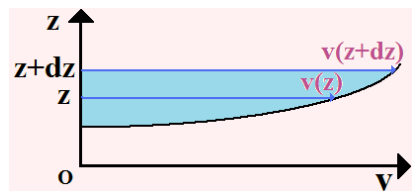
se déplaçant suivant **Ox**,

la **force de surface tangentielle**

nommée « force de cisaillement

ou de viscosité » s'écrit :

$$\vec{F} = -\eta \frac{\partial v}{\partial z} \vec{u}_x : (3)$$



▪ **Équations du mouvement d'une particule élémentaire**

- **Euler (fluide parfait)**

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \rightarrow \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}, \text{ avec l'opérateur nabla } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \rightarrow \text{Équation du mv}^t :$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} e_p \text{ et } : \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \times \vec{v} = -\vec{\nabla}(v^2/2) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

$$\rightarrow \text{Pour } \mathbf{e}_p = -\rho \mathbf{g}z : \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \times \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} (P + \rho g z + \rho v^2 / 2) : (\vec{E})$$

$$\rightarrow \text{Si } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \times \vec{v} = \vec{0}, \forall (\vec{r}, t) \text{ alors } (\vec{E}) \rightarrow \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} (P + \rho g z + \rho v^2 / 2).$$

$$\rightarrow \text{Si en plus l'écoulement est permanent} : \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \text{ et } P + \rho g z + \rho v^2 / 2 = \text{cste}$$

$$\rightarrow \text{Si le fluide est irrotationnel} : \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = 0, \text{ alors}$$

$$\exists \varphi \text{ potentiel scalaire tel que } \vec{v} = \vec{\nabla} \varphi \text{ et donc } \frac{P}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g z + v^2 / 2 = \text{cste}(\vec{r}) : (B\varphi)$$

$$\rightarrow \text{Ou intégrant } (\vec{E}) \text{ le long d'une ligne de courant } L, \int_L \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \times \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\text{car } d\vec{l} \parallel \vec{v} \rightarrow \text{Le long de } (AB) \subset L : \int_A^B \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) d\vec{l} = -[P + \rho g z + \rho v^2 / 2]_A^B$$

- **Navier-Stokes (fluide visqueux)**

Une particule de **fluide visqueux en mouvement** suivant **Ox** est soumise en plus du fluide parfait aux **frottements** des couches supérieure en $z + \frac{\delta z}{2}$ et inférieure en $z - \frac{\delta z}{2}$, de gradients de vitesse opposés ($e_p = -\rho g z$ pour le champ de pesanteur) :

$$(\vec{3}) \rightarrow d\vec{f}(x, z - \frac{\delta z}{2}) = -\eta S \frac{\partial v}{\partial z}(x, z - \frac{\delta z}{2}) \vec{e}_x, d\vec{f}(x, z + \frac{\delta z}{2}) = +\eta S \frac{\partial v}{\partial z}(x, z + \frac{\delta z}{2}) \vec{e}_x$$

$$\rightarrow \eta \Delta \vec{v} \text{ s'ajoute à } (\vec{E}) : \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \times \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} (P - e_p + \rho v^2 / 2) + \eta \Delta \vec{v} : (\vec{NS})$$

- Le **nombre de Reynolds Re** permet de comparer les deux types de forces

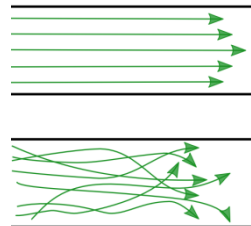
volumiques : $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$, **convective** et $\eta \Delta \vec{v}$, **diffusive** de viscosité :

$$(\vec{NS})_{2^\circ \text{ forme}} : \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} e_p + \eta \Delta \vec{v}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho |(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}|}{|\eta \Delta \vec{v}|} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu}, \nu = \frac{\eta}{\rho} : \text{viscosité dynamique}$$

○ Si $\text{Re} < 2000$: régime laminaire

○ Si $\text{Re} > 3000$: régime turbulent



- **Couche limite** (fluide visqueux entre deux plaques verticales, $\perp (Oy)$, l'une mobile (x))

Plaques ($y = \delta_0$, immobile) et ($y = 0$, mise en $mv^t, V_0 \vec{e}_x$). $(\vec{NS}) (\vec{v} = v \vec{e}_x) \rightarrow \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

$\rightarrow v = V_0(1 - \text{erf}(y/\delta))$, où **distance caractéristique** : $\delta = 2ct$ avec $c = \sqrt{\eta/\rho}$.

Écoulement plan Couette (régime permanent) : $\partial^2 v / \partial y^2 = 0 \rightarrow v = V_0(1 - y/\delta_0)$

- **Théorème de l'énergie cinétique du fluide** : $\frac{DE_c}{Dt} + \frac{DE_p}{Dt} = 0$: (4)

- **Théorème de Bernoulli** : théorème de l'énergie cinétique appliqué à un fluide parfait en écoulement permanent incompressible : $P + \rho g z + \rho v^2/2 = \text{cste}$: (B)
Autre forme : $P/\rho g + z + v^2/2g = H = \text{cste}$. H : hauteur totale, $P/\rho g$: hauteur de pression, z : cote, $v^2/2g$: hauteur cinétique, $z + P/\rho g$: hauteur piézométrique.
Pour deux points d'une même ligne de courant : $P_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$.

- **Théorème de Bernoulli généralisé** (prenant compte des échanges du fluide avec l'extérieur) : $(P_2 - P_1) + \rho g(z_2 - z_1) + \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{P_{\text{totale}1-2}}{Q_v} - \Delta p$
- $P_{\text{totale}1-2}$ = somme des puissances échangées entre le fluide et son milieu extérieur entre les positions 1 et 2 (exemple des machines : pompe → contribution positive, turbine → contribution négative).
- Δp = somme des pertes de charge entre les positions 1 et 2.

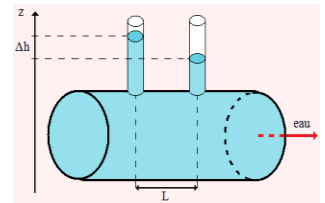
– **Pertes de charge systématiques** dans un tuyau cylindrique sur une longueur L :

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho v^2}{2} \frac{L}{D} \text{ et } \Delta h = \frac{\Delta P}{\rho g} = \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{L}{D}$$

Cp^t

→ si dues uniquement aux frottements du fluide en régime laminaire : $\lambda = 64 / Re$

→ si dépendent également de la rugosité k du tuyau en régime turbulent.



On utilise alors la formule de Colebrook : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k}{3,7D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right)$

– **Pertes de charge accidentelles** :

Cp^t

$$\Delta p = K \frac{\rho v^2}{2} \text{ et } \Delta h = \frac{\Delta P}{\rho g} = K \frac{v^2}{2g}, \text{ où } K : \text{coefficient déterminé expérimentalement.}$$

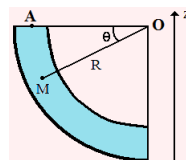
- **Force de traînée (F_x)** : qui s'oppose à l'avancée d'un corps dans un fluide (ρ, η), v_∞ : vitesse du fluide loin du corps de surface de réf. S et coefficient de traînée : C_x . (Cf. Annexes – Représentation des C_x de sphère dans un fluide suivant Re)
 - Due à la forme du corps, la viscosité, tourbillons ... : $F_x = \frac{1}{2} C_x \rho S v_\infty^2$
 - Boule (rayon R) à faible vitesse, formule de Stokes : $\vec{F} = -6\pi\eta R \vec{v}$: (\vec{S})
 - Boule (rayon R) à vitesse élevée : $\vec{F} = -\pi R^2 \rho v^2 \frac{\vec{v}}{v}$ proportionnelle à v^2 .
- **Fluide Newtonien** : fluide que l'on peut supposer compressible, dont la contrainte τ est fonction linéaire de la vitesse de déformation u (en y , cste de proport : ν). Ainsi, (Descr. Eulérienne) $\tau = \nu \frac{du}{dy}$. Pour \mathbf{v} uniforme, $\tau_{ij} = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \nu \delta_{ij} \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$
Si le fluide est supposé incompressible, $\text{div } \vec{u} = 0 \rightarrow \tau_{ij} = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \cdot \vec{T}_{/i} = \sum_j \tau_{ij} \vec{e}_j$

Exercices d'application et grands classiques

Énoncés (*Exos 3, 4 : coordonnées cylindriques (distance à l'axe : r , angle : θ , cote : z) :*

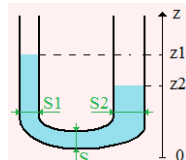
- 1. **Écoulement** dans un **tube 1/4 de cercle** de rayon **R**

Montrer par trois méthodes : $\ddot{\theta} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{g}{R} (1 - \sin\theta)$: (Eq)



- 2. **Oscillations** d'un **fluide parfait et incompressible** dans un **tube en U** (L : longueur du fluide).

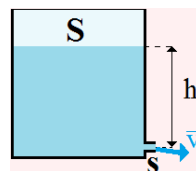
Préciser les **caractéristiques** du **mouvement** du **fluide**.



- 3. **Réservoir se vidant.**

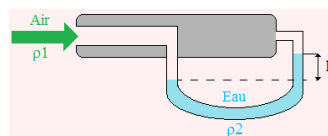
Montrer que la **hauteur** de fluide est $h(t) = \left(\sqrt{h(0)} - \frac{s}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} t \right)^2$

et la **durée** du **vidage**, $\Delta t = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h(0)}{g}}$.



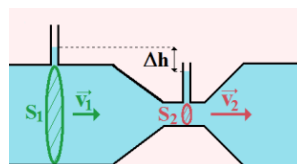
- 4. **Tube de Pitot** (*L'air y entre à la vitesse v .*)

Montrer que la **vitesse mesurée** est $v = \sqrt{2gh \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}}$



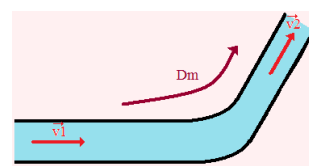
- 5. **Tube de Venturi**

Montrer que $\Delta P = \rho g \Delta h = \frac{\rho v_2^2}{2} \left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right)$.



- 6. **Conduite** (*coudée, de section variable*) :

Montrer que $\frac{Dp_{\text{fluide}}}{Dt} = D_m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$.



- 7. **Puits ponctuel, écoulement plan** de **débit-volume** par unité de **hauteur** $D = \text{cste}$

Montrer que les **coordonnées** de **vitesse** du fluide sont $v_r = \frac{D}{2\pi r}$, $v_\theta = 0$ et $\psi = \frac{D}{2\pi}$.

- 8. **Tourbillon ponctuel plan** d'intensité constante la **circulation** Γ .

Montrer que les **coordonnées** de **vitesse** sont $v_r = 0$, $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ et $\psi = \frac{-\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$.

Exos 9, 10, 11 : coordonnées cylindriques (distance à l'axe : r , angle : θ , cote : z)

- 9. Modélisation d'une tornade (fluide incompressible et $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z = \text{cste}$ si $r < R$)

Montrer en coordonnées cylindriques

que $\vec{v} = v(r) \vec{e}_\theta$ et qu'il existe $\vec{\Psi}$ telle que :

$\vec{v} = \text{rot}(\vec{\Psi})$ avec $\vec{\Psi}$ défini à un \vec{V} près.

→ En imposant $\text{div}(\vec{\Psi}) = 0$, montrer que :

- Si $r < R$, alors $P = P_0 + \rho \Omega^2 \left(\frac{r^2}{2} - R^2 \right)$.
- Si $r > R$, alors $P = P_0 - \rho \Omega^2 \frac{R^4}{2r^2}$.



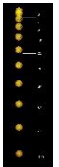
© commons.wikimedia.org – en – Justin1569

- 10. Bille (ρ_{boule} , rayon R) tombant dans un fluide visqueux (η , ρ_{fluide})

En prenant Oz l'axe vertical ascendant, pour une chute de vitesse initiale

$\dot{z}(0) = 0$, montrer que $\dot{z}(t) = -\frac{2gR^2}{9\eta} (\rho_{\text{boule}} - \rho_{\text{fluide}}) (1 - e^{-6\pi\eta R t/m})$.

Cf. viscosimètre à principe d'Höppler.



© commons.wikimedia.org – MichaelMaggs

- 11. Écoulement d'un fluide incompressible et irrotationnel autour d'un cylindre

Montrer que le pot. ϕ vérifie $\Delta\phi = 0$, puis $\phi = f(r) \cdot g(\theta) \rightarrow \phi = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \cos(\theta)$.

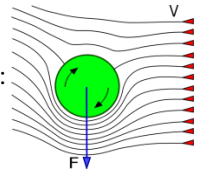
En déduire que $\vec{v} = (v_r = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos(\theta), v_\theta = -v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin(\theta))$.

- 12. Effet Magnus sur un cylindre tournant à $\vec{\omega}$ suivant son axe

Montrer qu'à la distance $r > R$ de l'axe du cylindre (de rayon R) :

$P_0 + \frac{r}{2} v_\infty^2 = P(\theta) + \frac{r}{2} (R\omega - 2v_\infty \sin(\theta))^2$.

la résultante des forces est $\vec{F} = - \iint P(\theta) d\vec{S} = 2\pi\rho R^2 (\vec{v}_\infty \times \vec{\omega})$.



© commons.wikimedia.org – Gang65

- 13. Poiseuille

Écoulement laminaire en régime permanent dans un cylindre d'axe Ox et rayon R

Le fluide visqueux (η) est compris entre $x = 0$ et $x = L$. On note $\Delta P = P(L) - P(0)$.

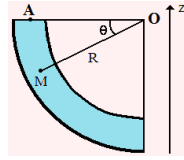
Montrer que la vitesse à la distance r de l'axe est $v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$.

Calculer le débit Q_v , la vitesse moyenne v_{moy} et la résistance à l'écoulement R .

- 14. Bulle d'air de rayon $a(t)$ dans de l'eau.

Estimer τ , sa durée de subsistance. (Cf. ENS – Oral)

Corrigés :



1. **Écoulement** dans un tube 1/4 de cercle de rayon R

1) $\rho \int_A^M (\vec{E}) \cdot d\vec{l}$: $\rho \int_A^M \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{l} = [-\rho g z]_A^M$, $\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $d\vec{l} = dl \vec{e}_\theta$

$\rightarrow \rho R \ddot{\theta} R (\frac{\pi}{2} - \theta) = \rho g R (1 - \sin(\theta)) \rightarrow \ddot{\theta} (\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{g}{R} (1 - \sin(\theta))$: (Eq)

2) $\rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = [R \frac{d(mv)}{dt} - Rv \frac{dm}{dt}] \vec{e}_y = Rm(t) \frac{dv}{dt} \vec{e}_y = -\rho s R^3 (\frac{\pi}{2} - \theta) \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{e}_y = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_y$ et

$\vec{M}_O \cdot \vec{e}_y = \int (\vec{OM} \times dm \vec{g}) \cdot \vec{e}_y \approx R \rho s R g \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \cos(\theta) d\theta = \rho s R^2 g \cdot (\sin(\theta) - 1) \rightarrow$ (Eq)

3) (4) $\rightarrow \frac{DE_c}{Dt} = \frac{1}{2} \frac{d(mv^2)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d(m)}{dt} v^2 = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} m(t) = \rho s R (\frac{\pi}{2} - \theta) R^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} = -\frac{DE_p}{Dt}$,

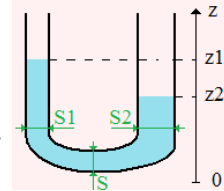
avec $\frac{DE_p}{Dt} = \frac{dm}{dt} g R (1 - \sin(\theta)) = -\rho s g R^2 (1 - \sin(\theta)) \dot{\theta} \rightarrow$ (Eq)

2. **Oscillations** d'un fluide parfait et incompressible dans un tube en U

$\int (\vec{E}) \cdot d\vec{l}$: $\int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{V} (P/\rho + v^2/2 + gz) d\vec{l} \approx g(z_2 - z_1)$,

soit : $L \frac{dv}{dt} \approx g(z_2 - z_1)$. Et (Cm'') $\rightarrow S_1 \frac{dz_1}{dt} = S \cdot v = -S_2 \frac{dz_2}{dt}$

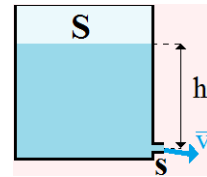
$\rightarrow \ddot{v} + \omega_0^2 v = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} (\frac{S}{S_1} + \frac{S}{S_2})}$, L : long. de fluide



3. (B) \rightarrow **Torricelli** (réservoir se vidant) :

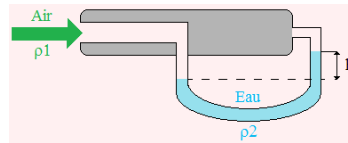
(Cm''') $\rightarrow v = -\frac{S}{s} \frac{dh}{dt} = \sqrt{2gh} \rightarrow h(t) = \left(\sqrt{h(0)} - \frac{s}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} t \right)^2$.

\rightarrow **Durée du vidage** : $\Delta t = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h(0)}{g}}$.



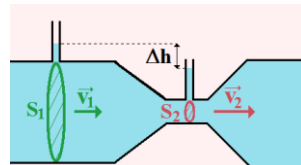
Si $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ non négligée : $\int_{\text{Ligne de courant}} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) d\vec{l} + \frac{s^2 - S^2}{2s^2} h^2 - gh = 0$.

4. (B) \rightarrow **Tube de Pitot** : $v = \sqrt{2gh \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}}$



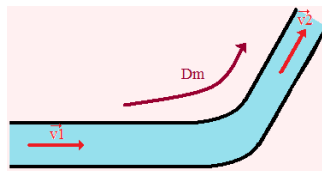
5. (Cm''') et (B) \rightarrow **Tube de Venturi** :

$\Delta P = \rho g \Delta h = \frac{\rho v_2^2}{2} \left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right)$.



6. **Conduite** (« Théorème d'Euler ») :

(0''') $\rightarrow \vec{F}_{\rightarrow \text{conduite}} = \frac{D\vec{p}_{\text{fluide}}}{Dt} = D_m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$.



- 7. Puits ponctuel, écoulement plan de débit-volume par unité de hauteur $D = \text{cste}$
 (Pc), $f(z) = \frac{D}{2\pi} \log\left(\frac{z}{a}\right)$, $z = x+iy = re^{i\theta}$, $\varphi = \frac{D}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \rightarrow \mathbf{v}_r = \frac{D}{2\pi r}$, $\mathbf{v}_\theta = \mathbf{0}$ et $\Psi = \frac{D}{2\pi} \theta$.

- 8. Tourbillon ponctuel plan d'intensité constante la circulation Γ
 (Pc), $f(z) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \log\left(\frac{z}{a}\right)$, $z = re^{i\theta}$. $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \rightarrow \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ et $\Psi = \frac{-\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$.

- 9. Modélisation d'une tornade avec un fluide incompressible et $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z = \overline{\text{cste}}$

En coordonnées cylindriques (distance à l'axe : r , angle : θ , cote : z) :

Si $r < R$, $\text{rot}(\vec{v}) = 2\vec{\Omega}$, si $r > R$, $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$. Et nécessairement, $\vec{v} = v(r) \vec{e}_\theta$.

$\text{div}(\vec{v}) = 0 \rightarrow \exists \vec{\Psi} / \vec{v} = \text{rot}(\vec{\Psi})$ avec $\vec{\Psi}$ défini à un $\vec{\nabla}$ près \rightarrow On prend $\text{div}(\vec{\Psi}) = 0$.

- Si $r < R$, $(0^{iv}) \rightarrow \Gamma = 2\pi r v(r) = \iint 2\vec{\Omega} d\vec{S} = 2\Omega \pi r^2 \rightarrow \mathbf{v}(r) = \Omega r$.

$$\Delta \vec{\Psi} = -2\vec{\Omega} \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\Omega r + \frac{C}{r} \rightarrow \Psi = -\frac{\Omega}{2} r^2 \text{ car } C \ln(r) \text{ diverge en } 0.$$

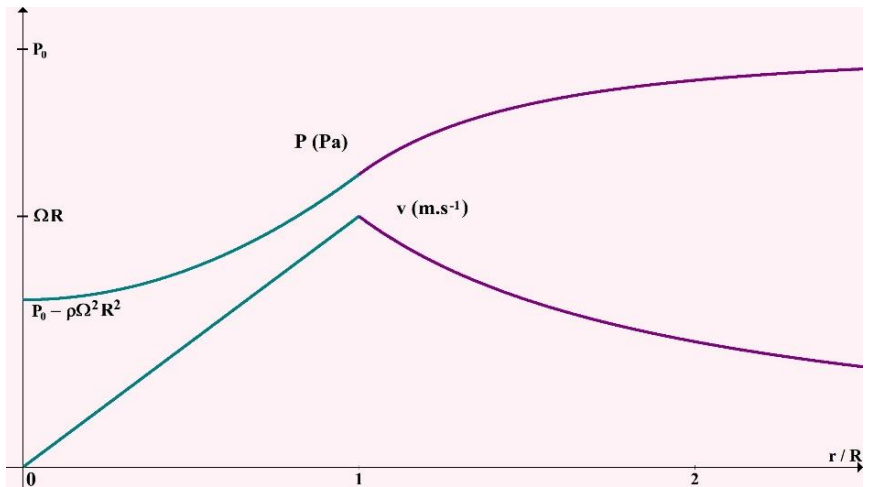
(E) et comme ici $\vec{\Psi} = \Psi \vec{e}_z$, $\vec{v} \times \text{rot}(\vec{v}) = \text{rot}(\vec{\Psi}) \times 2\vec{\Omega} = -\vec{\nabla}(2\Omega\Psi)$

$$\rightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{\Omega^2}{2} r^2 + 2\Omega\Psi = \frac{P_0}{\rho} = \text{cste} \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \rho\Omega^2 \left(\frac{r^2}{2} - R^2 \right).$$

- Si $r > R$, $(0^{iv}) \rightarrow \Gamma = 2\pi r \cdot v(r) = \iint 2\vec{\Omega} d\vec{S} = 2\Omega \pi R^2 \rightarrow \mathbf{v}(r) = \Omega \frac{R^2}{r}$.

$$\Delta \vec{\Psi} = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\Psi}) = \vec{0} \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial \Psi}{\partial r})}{\partial r} = 0 \rightarrow \text{Comme } v(R) = R\Omega, \Psi = C - \Omega R^2 \ln(r).$$

$$(E) \rightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{\Omega^2}{2} \frac{R^4}{r^2} = \frac{P_0}{\rho} = \text{cste} \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 - \rho\Omega^2 \frac{R^4}{2r^2}.$$



- 10. Bille tombant dans un fluide visqueux En prenant Oz axe vertical ascendant, (\vec{S}) \rightarrow Équation du mouvement (PFD) au centre d'inertie de la bille : $m\ddot{z} = -mg + \rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergée}} \cdot g - 6\pi\eta R \cdot \dot{z}$.
 \rightarrow Pour $\dot{z}(0) = 0$, $\dot{z}(t) = -\frac{2gR^2}{9\eta} (\rho_{\text{boule}} - \rho_{\text{fluide}}) (1 - e^{-6\pi\eta R t/m}) \rightarrow_{\infty} \text{cste}$.

- 11. **Écoulement** d'un fluide **incompressible** et **irrotationnel** autour d'un **cylindre** (Cm'') et (2') $\rightarrow \Delta\varphi = 0$ en polaire. $\varphi = f(r).g(\theta) \rightarrow \varphi = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \cos(\theta)$, $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$ et **point d'arrêt** en $\{r = R, \theta = 0, \pi\} \rightarrow$ on obtient $B = AR^2$ et $A = v_\infty$
 $\rightarrow \vec{v} = (v_r = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos(\theta), v_\theta = -v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin(\theta))$.

- 12. **Effet Magnus** sur un **cylindre tournant** à $\vec{\omega}$ suivant son axe

Le **pot.** des **vitesse**s du fluide est $\varphi = v_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos(\theta) + R^2 \omega \theta$ (B) appliqué entre l' ∞ et la **surface** du **cylindre** ($r = R$),

avec (2'), $P_0 + \frac{\rho}{2} v_\infty^2 = P(\theta) + \frac{\rho}{2} (R\omega - 2v_\infty \sin(\theta))^2$.

Ballon © commons.wikimedia.org – Historicair



\rightarrow **Résultante** : $\vec{F} = - \iint P(\theta) d\vec{S} = 2\pi\rho R^2 (\vec{v}_\infty \times \vec{\omega})$ ($\vec{F} \perp \vec{v}_\infty$ et $\vec{F} \perp \vec{\omega}$)

- 13. **Poiseuille**

Écoulement laminaire en régime *permanent* dans un *cylindre* d'axe *Ox* et rayon *R*.
 Le fluide *visqueux* (η) est compris entre $x = 0$ et $x = L$. On note $\Delta P = P(L) - P(0)$.

(NS) $\rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = cste = \frac{\Delta P}{L} \rightarrow \Delta P r^2 = \eta 2rL \frac{dv}{dr} \rightarrow v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$.

(0'') \rightarrow **Débit** : $Q_v = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R v(r) r d\theta dr = \frac{2\pi\Delta P}{4\eta L} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi\Delta P}{8\eta L} R^4$. Alors,

Vitesse moyenne : $v_{\text{moy}} = Q_v / \pi R^2 = \frac{\Delta P}{8\eta L} R^2$, **résistance** à l'écoulement : $R = \frac{\Delta P}{Q_v} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

Conduits en série : $R = \sum R_k, \Delta P = Q_v \sum R_k$. Conduits // : $R^{-1} = \sum R_k^{-1}, Q_v = \Delta P \sum R_k^{-1}$.

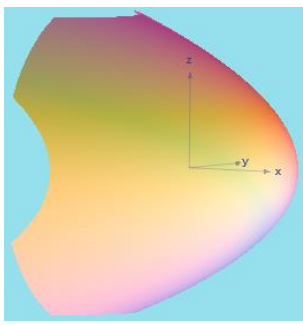
Diagramme des vitesses

dans ce **cylindre** d'axe **Ox**,
 de longueur **L** et rayon **R** :

Paraboloïde $x = v \left(\sqrt{y^2 + z^2} \right)$ \rightarrow

avec $v(0) = v_{\text{max}} = \frac{\Delta P}{4\eta L} R^2$

et $v(R) = 0$ (aux bords).



- 14. L'évolution d'une **bulle d'air** de centre **O** et **rayon a** dans un **liquide parfait** peut être **modélisée** en tout **M** tel que $OM = r \geq a$ par un **écoulement homogène**,

non stat, **incompressible** et **irrotationnel**, ($B\varphi$) $\rightarrow \exists f / \forall (r, t), \frac{P}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v^2/2 = f(t)$

(Cm''') $\rightarrow 4\pi r^2 v(r, t) = 4\pi a^2(t) \dot{a}(t) \rightarrow \varphi(r, t) = -a^2(t) \dot{a}(t) / r$. Alors, si $P_0 = P(\infty)$,

\rightarrow Entre ∞ et $r \geq a$, $\frac{a^2 \ddot{a} + 2a \dot{a}^2}{r} + \frac{a^4 \dot{a}^2}{2r^4} = \frac{P_0 - P(r, t)}{\rho}$ et (**La**) ($i : r < a$) $\rightarrow P_1 - P(a(t)) = \frac{2\gamma}{a(t)}$

\rightarrow En $r = a(t)$, \times par $2\dot{a}a^2$, puis **intégrant**, $a^3 \dot{a}^2 = \frac{P_0 - P_1}{3\rho/2} (a(0)^3 - a^3) + \frac{2\gamma}{\rho} (a(0)^2 - a^2)$

$\rightarrow \tau = \int_0^{a(0)} dt = \int_0^{a(0)} da / \dot{a} = a(0) \sqrt{3\rho/2(P_0 - P_1)} \int_0^1 dx / \sqrt{1/x^2 - 1}$ en néglig γ .