

Fiche P7 – Dynamique des fluides

Définitions et variables

- **Particule de fluide. Mésoscopique** : assez **petite** pour que le fluide soit décrit comme un milieu continu et assez **grande** pour que l'agitation thermique de ses particules n'influe que de façon négligeable sur sa quantité de matière.
- **Dérivée particulaire** pour $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\vec{r}, t)$: $\frac{D\mathbf{X}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \mathbf{X}$
- **Description lagrangienne** : on suit une **particule** du **fluide** dans son **évolution** : $\vec{R} = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t))$. La **vitesse** de cette particule est $\frac{D\vec{R}}{Dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$.
- **Description eulérienne** : on observe l'**ensemble** du **fluide** et on identifie le **champ** des vitesses $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ou celui de la masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$.
- **Passage** entre les **deux descriptions** : $\frac{dx}{v_x(\vec{r}, t)} = \frac{dy}{v_y(\vec{r}, t)} = \frac{dz}{v_z(\vec{r}, t)} = dt$
- **Ligne de courants L** à t_0 : courbe (x, y, z) à laquelle $\vec{v}(\vec{r}, t_0)$ est tangent en tout point.

$$\mathbf{L} : \frac{dx}{v_x(\vec{r}, t_0)} = \frac{dy}{v_y(\vec{r}, t_0)} = \frac{dz}{v_z(\vec{r}, t_0)} : (0)$$
- **Caractère d'un fluide** : pour chacune des particules le composant.
- **Caractère d'un écoulement** : pour chaque particule lors de son évolution.
- **Fluide parfait** : fluide dont on néglige effets de viscosité et de la chaleur.
- **Incompressibilité** : $\rho(\vec{r}, t) = \text{cste}$. Soit, en représentation lagrangienne : $\frac{D\rho}{Dt} = 0$
- **Densité de courant de masse** : $\vec{j} = \rho \vec{v}$: (\vec{j})
- **Débit volumique** à travers une section \vec{dS} : $dD_v = \vec{v} \cdot \vec{dS}$,
à travers S : $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{dS}$, et si uniforme : $D_v = S \cdot v$: ($0''$)
- **Débit massique** : $dD_m = \vec{j} \cdot \vec{dS} = \rho \vec{v} \cdot \vec{dS}$. Débit massique uniforme : $D_m = \rho S_{\perp} \cdot v$
Débit massique dans un tube de section S_{\perp} : $D_m = \iint \rho(\mathbf{r}_{\perp}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_{\perp}) \cdot d\mathbf{S}_{\perp}$: ($0'''$)
- **Vecteur tourbillon** : $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}(\mathbf{v})}$. Pour un **fluide irrotationnel**, $\vec{\Omega} = \vec{0}$.
- $\vec{v}(M^*) = \vec{v}(M) + \vec{D} + \vec{\Omega} \times \overline{MM^*}$, \vec{D} **vecteur déformation**.
- **Circulation** $\Gamma = \int \vec{v} \cdot d\vec{l} \rightarrow$ Pour une courbe fermée C entourant S :

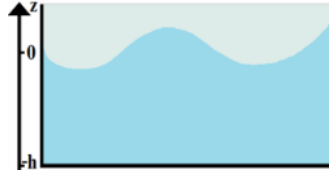
$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overline{\text{rot} \vec{v}} \cdot \vec{dS} = 2 \iint_S \vec{\Omega} \cdot \vec{dS}$$
 : (0^{iv})
- La **viscosité** traduit les frottements entre les couches du fluide en mouvement.

Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Houle** dans une cuve parallélépipédique d'un fluide incompressible, irrotationnel



free



Houle (onde plane) de l'eau dans la cuve parallélépipédique de **faible profondeur h**, avec visualisation de l'excitation (nécessairement de même fréquence) à l'oscilloscope. Le **fluide** (eau liquide) est considéré **irrotationnel**, soit $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$, ce qui implique que l'on peut écrire \vec{v} en fonction d'un potentiel scalaire $\varphi(\vec{r}, t)$: $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ en coordonnées cartésiennes. De plus on considère le fluide **incompressible**, donc $\text{div}(\vec{v}) = 0$: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$.

La **houle** se propage **rectilignement** suivant **Ox**. *Vecteur d'onde de norme* $k = 2\pi/\lambda$
 $\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \exists \varphi(\vec{r}, t)$ tel que $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$. La conservation de la masse implique alors :

$$\text{div}(\vec{v}) = \text{div}(\vec{\nabla}\varphi) = \Delta\varphi = 0 : \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \rightarrow \text{On résoud :}$$

$\varphi(x,y,z,t) = f(z)\cos(\omega t - kx)$ avec $f(z) = ae^{kz} + be^{-kz}$, où **a, b** sont des constantes car :

$$\Delta\varphi(x,y,z,t) = (ae^{kz} + be^{-kz}) \frac{\partial^2 \cos(\omega t - kx)}{\partial x^2} + \cos(\omega t - kx) \frac{\partial^2 (ae^{kz} + be^{-kz})}{\partial z^2} = (k^2 - k^2)\varphi$$

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi \rightarrow v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ et au fond, } v_z(x,y, -h,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y, -h,t) = 0 \rightarrow a = be^{2kh}.$$

$\rightarrow f(z) = A \cosh k(z+h)$. La **surface** est définie par $z = \xi(x,y, t) \ll h$, alors

$$v_z(x,y, z,t) = \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ et } (\vec{E}) \text{ s'écrit } \rho \frac{\partial\vec{\nabla}\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho g\xi) = \vec{0} \rightarrow \vec{\nabla}\left(\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho g\xi\right) = \vec{0},$$

$$\text{puis } \frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\xi = \text{cste.} \rightarrow \text{En dérivant } \forall(x,t), \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \text{ Alors,}$$

$$-\omega^2 \cosh(kh) + kg \sinh(kh) = 0, \text{ soit : } \omega^2 = kg \tanh kh : \text{ relation de dispersion de l'onde.}$$

. Les variables de temps et d'espace étant indépendantes, on peut intervertir $\partial/\partial t$ et $\vec{\nabla}$

. Fréquence de battements nécessaires pour obtenir $\lambda = h = 1 \text{ m} : f \approx 0,8 \text{ Hz}$.

. En tenant compte de la tension superficielle de l'eau (de constante γ) dans (\vec{E}) , on obtient comme relation de dispersion (rides capillaires) :

$$\omega^2 = k(g + \gamma(k^2 / \rho_{\text{eau}})) \tanh kh.$$

. En considérant (*La*), la surpression à la surface est γ/R , avec $1/R = \partial^2\xi/\partial x^2$.

Formules, propriétés

- Conservation de la matière

- locale : $\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$: (Cm) car $\forall V$,

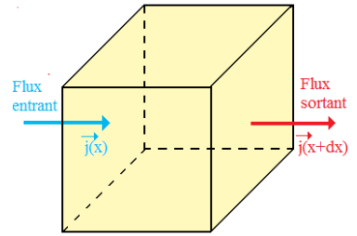
$$\iiint_V \text{div}(\vec{j}) dV = \iint_S \vec{j} d\vec{S} = \phi = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Avec (\vec{j}) , cette conservation s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) = 0, \text{ soit : } \frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) = 0 : (\text{Cm}')$$

Pour un fluide **incompressible**, $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ et donc $\text{div}(\vec{v}) = 0$: (Cm'')

- globale : $D_m = \text{cste}$ et si fluide **incompressible**, également $D_v = \text{cste}$: (Cm''')



- Types de fluides ou d'écoulements

. **Fluide** ou écoulement **irrotationnel** : $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$.

$\Rightarrow \exists \varphi(\vec{r}, t)$, fonction **scalaire**, « potentiel des vitesses » telle que $\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi$: (2')

Équipotentielles à $t = t_0$: $\varphi(\vec{r}, t_0) = \text{cste}$.

. **Fluide** ou écoulement **incompressible** : $\text{div}(\vec{v}) = 0$.

$\Rightarrow \exists \vec{\psi}(\vec{r}, t)$ fonction vectorielle « de courant » telle que $\vec{v} = \text{rot}(\vec{\psi})$: (2'')

Lignes de courant à $t = t_0$: $\vec{\psi}(\vec{r}, t_0) = \text{cste}$.

. **Exemple** d'un écoulement **plan** dans (xOy), $\vec{v} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}; -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$

$\rightarrow L : \frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \rightarrow d\psi = 0$, soit $\psi = \text{cste}$ le long de L.

Et $\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi = 0$: **lignes de courant et équipotentielles sont orthogonales**.

. **Potentiel complexe** : $f = \varphi + i\psi$: (Pc). $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow f$ est une f° de $z = x + iy$.

. **Fluide visqueux** : pour un fluide

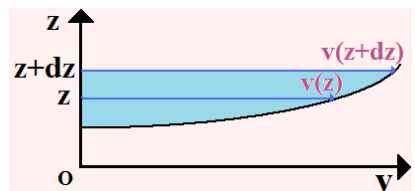
se déplaçant suivant **Ox**,

la **force de surface tangentielle**

nommée « force de cisaillement

ou de viscosité » s'écrit :

$$\vec{F} = -\eta \frac{\partial v}{\partial z} \vec{u}_x : (\text{3})$$



▪ **Équations du mouvement d'une particule élémentaire**

- **Euler (fluide parfait)**

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \rightarrow \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}, \text{ avec l'opérateur nabla } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \rightarrow \underline{\text{Équation du mv}^t} :$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} e_p \text{ et } : \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \times \vec{v} = -\vec{\nabla}(v^2/2) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

$$\rightarrow \text{Pour } e_p = -\rho g z : \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \times \vec{v} \right) = -\vec{\nabla}(P + \rho g z + \rho v^2/2) : (\vec{E})$$

$$\rightarrow \text{Si } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \times \vec{v} = \vec{0}, \forall (\vec{r}, t) \text{ alors } (\vec{E}) \rightarrow \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla}(P + \rho g z + \rho v^2/2)$$

$$\rightarrow \text{Si en plus l'écoulement est } \textit{permanent} : \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \text{ et } P + \rho g z + \rho v^2/2 = \textit{cste}$$

$$\rightarrow \text{Si le fluide est } \textit{irrotationnel} : \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = 0, \text{ alors}$$

$$\exists \varphi \text{ potentiel scalaire tel que } \vec{v} = \vec{\nabla} \varphi \text{ et donc } \frac{P}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g z + v^2/2 = \textit{cste}(\vec{r})$$

$$\rightarrow \text{Ou intégrant } (\vec{E}) \text{ le long d'une ligne de courant } L, \int_L (\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\text{car } d\vec{l} \parallel \vec{v} \rightarrow \text{Le long de } (AB) \subset L : \int_A^B \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{l} = - [P + \rho g z + \rho v^2/2]_A^B$$

- **Navier-Stokes (fluide visqueux)**

Une particule de **fluide visqueux en mouvement** suivant **Ox** est soumise en plus du fluide parfait aux **frottements** des couches supérieure en $z + \frac{\delta z}{2}$ et inférieure en $z - \frac{\delta z}{2}$, de gradients de vitesse opposés ($e_p = -\rho g z$ pour le champ de pesanteur) :

$$(\vec{3}) \rightarrow d\vec{f}(x, z - \frac{\delta z}{2}) = -\eta S \frac{\partial v}{\partial z}(x, z - \frac{\delta z}{2}) \vec{e}_x, d\vec{f}(x, z + \frac{\delta z}{2}) = +\eta S \frac{\partial v}{\partial z}(x, z + \frac{\delta z}{2}) \vec{e}_x$$

$$\rightarrow \eta \Delta \vec{v} \text{ s'ajoute à } (\vec{E}) : \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \times \vec{v} \right) = -\vec{\nabla}(P - e_p + \rho v^2/2) + \eta \Delta \vec{v} : (\vec{NS})$$

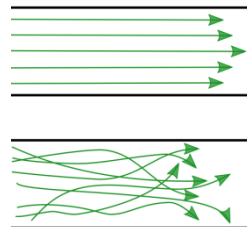
- Le **nombre de Reynolds Re** permet de comparer les deux **types de forces volumiques** : $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$, **convective** et $\eta \Delta \vec{v}$, **diffusive de viscosité** :

$$(\vec{NS})_2^{\circ} \text{ forme} : \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} e_p + \eta \Delta \vec{v}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho |(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}|}{|\eta \Delta \vec{v}|} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu}, \nu = \frac{\eta}{\rho} : \textit{viscosité dynamique}$$

○ Si **Re < 2000** : régime laminaire

○ Si **Re > 3000** : régime turbulent



- **Théorème de l'énergie cinétique du fluide** : $\frac{DE_c}{Dt} + \frac{DE_p}{Dt} = 0$: (4)
- **Théorème de Bernoulli** : théorème de l'énergie cinétique appliqué à un **fluide parfait en écoulement permanent incompressible** : $\mathbf{P} + \rho g z + \rho v^2/2 = \text{cste}$: (B)
Autre forme : $\mathbf{P}/\rho g + z + v^2/2g = \mathbf{H} = \text{cste}$. H : hauteur totale, $P/\rho g$: hauteur de pression, z : cote, $v^2/2g$: hauteur cinétique, $z + P/\rho g$: hauteur piézométrique.
Pour deux points d'une même ligne de courant : $\mathbf{P}_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = \mathbf{P}_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$.
- **Théorème de Bernoulli généralisé** (prenant compte des échanges du fluide avec l'extérieur) : $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + \rho g(z_2 - z_1) + \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{\mathbf{P}_{\text{totale1-2}}}{Q_v} - \Delta p$
- $\mathbf{P}_{\text{totale1-2}}$ = somme des puissances échangées entre le fluide et son milieu extérieur entre les positions 1 et 2 (exemple des machines : pompe → contribution positive, turbine → contribution négative).
- Δp = somme des pertes de charge entre les positions 1 et 2.

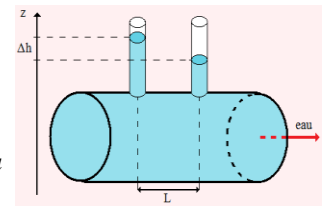
Cp^t

– **Pertes de charge systématiques** dans un tuyau cylindrique sur une longueur \mathbf{L} :

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho v^2}{2} \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{D}} \text{ et } \Delta h = \frac{\Delta P}{\rho g} = \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{D}}$$

→ si dues uniquement aux frottements du fluide en régime laminaire : $\lambda = 64 / Re$

→ si dépendent également de la rugosité \mathbf{k} du tuyau en régime turbulent.



On utilise alors la formule de Colebrook : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k}{3,7D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right)$

Cp^t

– **Pertes de charge accidentelles** :

$$\Delta p = \mathbf{K} \frac{\rho v^2}{2} \text{ et } \Delta h = \frac{\Delta P}{\rho g} = \mathbf{K} \frac{v^2}{2g}, \text{ où } \mathbf{K} : \text{coefficient déterminé expérimentalement.}$$

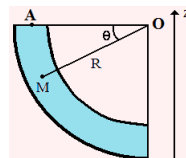
- **Force de traînée (\mathbf{F}_x)** : qui s'oppose à l'avancée d'un corps dans un fluide (ρ , η), v_∞ : vitesse du fluide loin du corps de surface de réf. \mathbf{S} et coefficient de traînée : \mathbf{C}_x .
 - Due à la **forme** du corps, la **viscosité**, **tourbillons** ... : $\mathbf{F}_x = \frac{1}{2} \mathbf{C}_x \rho \mathbf{S} v_\infty^2$
 - **Boule** (rayon \mathbf{R}) à **faible vitesse**, formule de Stokes : $\vec{\mathbf{F}} = -6\pi\eta\mathbf{R}\vec{\mathbf{v}}$: ($\vec{\mathbf{S}}$)
 - **Boule** (rayon \mathbf{R}) à **vitesse élevée** : $\vec{\mathbf{F}} = -\pi\mathbf{R}^2\rho v^2 \frac{\vec{\mathbf{v}}}{v}$ proportionnelle à v^2 .

Exercices d'application et grands classiques

Énoncés :

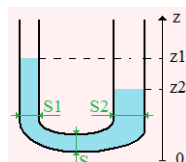
- 1. **Écoulement** dans un **tube 1/4 de cercle** de rayon **R**

Montrer par trois méthodes : $\ddot{\theta} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{g}{R} (1 - \sin\theta)$: (Eq)



- 2. **Oscillations** d'un **fluide parfait et incompressible** dans un **tube en U** (L : longueur du fluide)

Préciser les caractéristiques du **mouvement** du **fluide**.



- 3. **Puits ponctuel, écoulement plan** de débit-volume par unité de hauteur $D = \text{cste}$

Montrer que les **coordonnées** de **vitesse** du fluide sont $\mathbf{v}_r = \frac{D}{2\pi r}$, $\mathbf{v}_\theta = \mathbf{0}$ et $\Psi = \frac{D}{2\pi} \theta$.

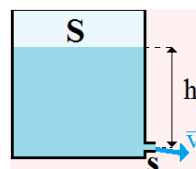
- 4. **Tourbillon ponctuel plan** d'intensité constante la circulation Γ

Montrer que les **coordonnées** de **vitesse** sont $\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ et $\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$.

- 5. **Réservoir se vidant**

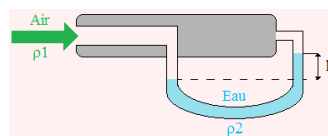
Montrer que la hauteur de fluide est $\mathbf{h(t)} = \left(\sqrt{\mathbf{h(0)}} - \frac{s}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \mathbf{t} \right)^2$

et la durée du vidage : $\Delta t = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h(0)}{g}}$.



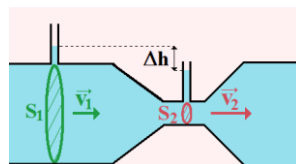
- 6. **Tube de Pitot**

Montrer que la **vitesse mesurée** est $\mathbf{v} = \sqrt{2gh} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$



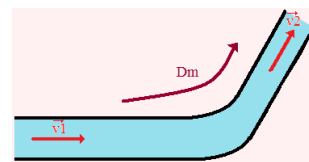
- 7. **Tube de Venturi**

Montrer que $\Delta P = \rho g \Delta h = \frac{\rho v_2^2}{2} \left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right)$.



- 8. **Conduite** (coudée, de section variable) :

Montrer que $\frac{D\overline{\mathbf{P}}_{\text{fluide}}}{Dt} = \mathbf{D}_m \cdot (\overline{\mathbf{v}}_2 - \overline{\mathbf{v}}_1)$.



Exos 9, 10, 11 : coordonnées cylindriques (distance à l'axe : r , angle : θ , cote : z)

- 9. Modélisation d'une tornade avec un fluide incompressible et $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z = \overrightarrow{cste}$

Montrer en coordonnées cylindriques

que $\vec{v} = v(r) \vec{e}_\theta$ et qu'il existe $\vec{\Psi}$ telle que :

$\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\Psi})$ avec $\vec{\Psi}$ défini à un \vec{V} près.

→ En imposant $\text{div}(\vec{\Psi}) = 0$, montrer que :

- Si $r < R$, alors $P = P_0 + \rho \Omega^2 \left(\frac{r^2}{2} - R^2 \right)$.

- Si $r > R$, alors $P = P_0 - \rho \Omega^2 \frac{R^4}{2r^2}$.



© commons.wikimedia.org – en – Justin1569

- 10. Écoulement d'un fluide incompressible et irrotationnel autour d'un cylindre

Montrer que le potentiel ϕ vérifie $\Delta \phi = 0$, puis que :

$$\phi = f(r) \cdot g(\theta) \rightarrow \phi = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \cos(\theta).$$

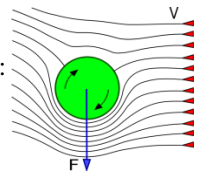
En déduire que $\vec{v} = (v_r = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos(\theta), v_\theta = -v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin(\theta))$.

- 11. Effet Magnus sur un cylindre tournant à $\vec{\omega}$ suivant son axe

Montrer qu'à la distance $r > R$ de l'axe du cylindre (de rayon R) :

$$P_0 + \frac{r}{2} v_\infty^2 = P(\theta) + \frac{r}{2} (R\omega - 2v_\infty \sin(\theta))^2.$$

la résultante des forces est $\vec{F} = - \iint P(\theta) d\vec{S} = 2\pi \rho R^2 (\vec{v}_\infty \times \vec{\omega})$.

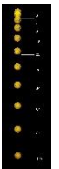


© commons.wikimedia.org – Gang65

- 12. Bille (ρ_{boule} , rayon R) tombant dans un fluide visqueux (η , ρ_{fluide})

En prenant Oz l'axe vertical ascendant, pour une chute de vitesse initiale

$$\dot{z}(0) = 0, \text{ montrer que } \dot{z}(t) = -\frac{2gR^2}{9\eta} (\rho_{boule} - \rho_{fluide}) (1 - e^{-6\pi\eta R t/m}).$$



© commons.wikimedia.org – MichaelMaggs

- 13. Poiseuille

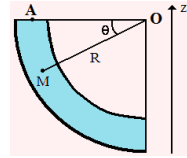
Écoulement laminaire en régime permanent dans un cylindre d'axe Ox et rayon R
Le fluide visqueux (η) est compris entre $x = 0$ et $x = L$. On note $\Delta P = P(L) - P(0)$.

Montrer que la vitesse à la distance r de l'axe est $v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$.

Calculer le débit Q_v , la vitesse moyenne v_{moy} et la résistance à l'écoulement R .

Corrigés :

▪ **1. Écoulement dans un tube 1/4 de cercle de rayon R**



1) $\rho \int_A^M (\vec{E}) \cdot d\vec{l} : \rho \int_A^M \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{l} = [-\rho g z]_A^M, \vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $d\vec{l} = dl \vec{e}_\theta$

$\rightarrow \rho R \ddot{\theta} R (\frac{\pi}{2} - \theta) = \rho g R (1 - \sin(\theta)) \rightarrow \ddot{\theta} (\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{g}{R} (1 - \sin\theta) : (Eq)$

2) $\rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = [R \frac{d(mv)}{dt} - Rv \frac{dm}{dt}] \vec{e}_y = Rm(t) \frac{dv}{dt} \vec{e}_y = -\rho s R^3 (\frac{\pi}{2} - \theta) \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{e}_y = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_y$ et
 $\vec{M}_O \cdot \vec{e}_y = \int (\vec{OM} \times dm \vec{g}) \cdot \vec{e}_y \approx R \rho s R g \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \cos(\theta) d\theta = \rho s R^2 g \cdot (\sin(\theta) - 1) \rightarrow (Eq)$

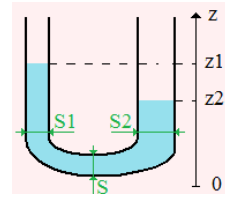
3) (4) $\rightarrow \frac{DE_c}{Dt} = \frac{1}{2} \frac{d(mv^2)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d(m)}{dt} v^2 = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} m(t) = \rho s R (\frac{\pi}{2} - \theta) R^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} = -\frac{DE_p}{Dt}$,
 avec $\frac{DE_p}{Dt} = \frac{dm}{dt} g R (1 - \sin(\theta)) = -\rho s g R^2 (1 - \sin(\theta)) \dot{\theta} \rightarrow (Eq)$

▪ **2. Oscillations d'un fluide parfait et incompressible dans un tube en U**

$\int (\vec{E}) \cdot d\vec{l} : \int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{v} (P/\rho + v^2/2 + gz) d\vec{l} \approx g(z_2 - z_1)$,

soit : $L \frac{dv}{dt} \approx g(z_2 - z_1)$. Et (Cm'') $\rightarrow S_1 \frac{dz_1}{dt} = S \cdot v = -S_2 \frac{dz_2}{dt}$

$\rightarrow \ddot{v} + \omega_0^2 v = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} (\frac{S}{S_1} + \frac{S}{S_2})}$, L : long. de fluide



▪ **3. Puits ponctuel, écoulement plan de débit-volume par unité de hauteur D = cste**

(Pc), $f(z) = \frac{D}{2\pi} \log(\frac{z}{a})$, $z = x+iy = re^{i\theta}$, $\varphi = \frac{D}{2\pi} \ln(\frac{r}{a}) \rightarrow \mathbf{v}_r = \frac{D}{2\pi r}$, $\mathbf{v}_\theta = 0$ et $\Psi = \frac{D}{2\pi} \theta$

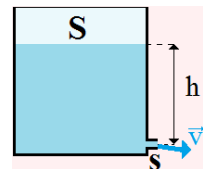
▪ **4. Tourbillon ponctuel plan d'intensité constante la circulation Γ**

(Pc), $f(z) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \log(\frac{z}{a})$, $z = re^{i\theta}$. $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \rightarrow \mathbf{v}_r = 0$, $\mathbf{v}_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ et $\Psi = \frac{-\Gamma}{2\pi} \ln(\frac{r}{a})$

▪ **5. (B) → Torricelli (réservoir se vidant) :**

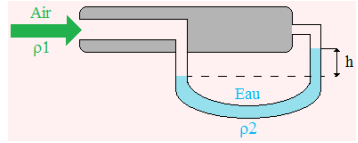
(Cm''') $\rightarrow v = -\frac{S}{s} \frac{dh}{dt} = \sqrt{2gh} \rightarrow \mathbf{h}(t) = \left(\sqrt{h(0)} - \frac{s}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} t \right)^2$.

\rightarrow Durée du vidage : $\Delta t = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h(0)}{g}}$.



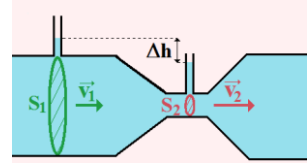
Si $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ non négligée : $\int_{\text{Ligne de courant}} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) d\vec{l} + \frac{s^2 - S^2}{2s^2} \dot{h}^2 - gh = 0$.

- 6. (B) → Tube de Pitot : $v = \sqrt{2gh \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}}$.



- 7. (Cm''') et (B) → Tube de Venturi :

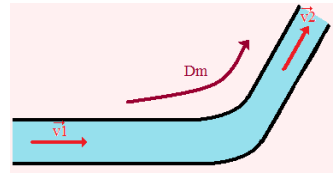
$$\Delta P = \rho g \Delta h = \frac{\rho v_2^2}{2} \left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right).$$



- 8. Conduite (coudée, de section variable) :

$$(0''') \rightarrow \vec{F}_{\text{conduite}} = \frac{D\vec{P}_{\text{fluide}}}{Dt} = D_m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

(« Théorème d'Euler »)



- 9. Modélisation d'une tornade avec un fluide incompressible et $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z = \text{cste}$

En coordonnées cylindriques (distance à l'axe : r , angle : θ , cote : z) :

Si $r < R$, $\text{rot}(\vec{v}) = 2\vec{\Omega}$, si $r > R$, $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$. Et nécessairement, $\vec{v} = v(r) \vec{e}_\theta$.

$\text{div}(\vec{v}) = 0 \rightarrow \exists \vec{\Psi} / \vec{v} = \text{rot}(\vec{\Psi})$ avec $\vec{\Psi}$ défini à un $\vec{\nabla}$ près \rightarrow On prend $\text{div}(\vec{\Psi}) = 0$.

- Si $r < R$, $(0^{iv}) \rightarrow \Gamma = 2\pi r v(r) = \iint 2\vec{\Omega} d\vec{S} = 2\Omega \pi r^2 \rightarrow v(r) = \Omega r$.

$$\Delta \vec{\Psi} = -2\vec{\Omega} \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\Omega r + \frac{C}{r} \rightarrow \Psi = -\frac{\Omega}{2} r^2 \text{ car } C \ln(r) \text{ diverge en } 0.$$

(\vec{E}) et comme ici $\vec{\Psi} = \Psi \vec{e}_z$, $\vec{v} \times \text{rot}(\vec{v}) = \text{rot}(\vec{\Psi}) \times 2\vec{\Omega} = -\vec{\nabla}(2\Omega \Psi)$

$$\rightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{\Omega^2}{2} r^2 + 2\Omega \Psi = \frac{P_0}{\rho} = \text{cste} \rightarrow P = P_0 + \rho \Omega^2 \left(\frac{r^2}{2} - R^2 \right).$$

- Si $r > R$, $(0^{iv}) \rightarrow \Gamma = 2\pi r \cdot v(r) = \iint 2\vec{\Omega} d\vec{S} = 2\Omega \pi R^2 \rightarrow v(r) = \Omega \frac{R^2}{r}$.

$$\Delta \vec{\Psi} = \text{rot} \text{rot}(\vec{\Psi}) = \vec{0} \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial \Psi}{\partial r})}{\partial r} = 0 \rightarrow \text{Comme } v(R) = R\Omega, \Psi = C - \Omega R^2 \ln(r).$$

$$(\vec{E}) \rightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{\Omega^2 R^4}{2 r^2} = \frac{P_0}{\rho} = \text{cste} \rightarrow P = P_0 - \rho \Omega^2 \frac{R^4}{2 r^2}.$$

- 10. **Écoulement** d'un fluide **incompressible** et **irrotationnel** autour d'un **cylindre**

(Cm'') et (2') $\rightarrow \Delta\phi = 0$ en polaire. $\phi = f(r).g(\theta) \rightarrow \phi = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \cos(\theta)$,

$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$ et **point d'arrêt** en $\{r = R, \theta = 0, \pi\} \rightarrow$ on obtient $B = AR^2$ et $A = v_\infty$

$\rightarrow \vec{v} = (v_r = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos(\theta), v_\theta = -v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin(\theta))$.

- 11. **Effet Magnus** sur un **cylindre tournant** à $\vec{\omega}$ suivant son **axe**

Le pot. des vitesses du fluide est $\phi = v_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos(\theta) + R^2\omega\theta$

Bernoulli (B) appliqué entre l' ∞ et la surface du cylindre ($r = R$),

avec (2'), $P_0 + \frac{\rho}{2} v_\infty^2 = P(\theta) + \frac{\rho}{2} (R\omega - 2v_\infty \sin(\theta))^2$.

Ballon © commons.wikimedia.org – Historicair



\rightarrow Résultante : $\vec{F} = - \iint P(\theta) d\vec{S} = 2\pi\rho R^2 (\vec{v}_\infty \times \vec{\omega})$ ($\vec{F} \perp \vec{v}_\infty$ et $\vec{F} \perp \vec{\omega}$)

- 12. **Bille tombant** dans un **fluide visqueux** En prenant **Oz** axe **vertical ascendant**, (\vec{S}) \rightarrow **Équation du mouvement (PFD)**

au **centre d'inertie** de la **bille** : $m\ddot{z} = -mg + \rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergé}} g - 6\pi\eta R \dot{z}$.

\rightarrow Pour $\dot{z}(0) = 0$, $\dot{z}(t) = -\frac{2gR^2}{9\eta} (\rho_{\text{boule}} - \rho_{\text{fluide}}) (1 - e^{-6\pi\eta R t/m}) \rightarrow cste$.

- 13. **Poiseuille**

Écoulement laminaire en régime **permanent** dans un cylindre d'axe **Ox** et rayon **R**.

Le fluide visqueux (η) est compris entre $x = 0$ et $x = L$. On note $\Delta P = P(L) - P(0)$.

(NS) $\rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = cste = \frac{\Delta P}{L} \rightarrow \Delta P r^2 = \eta 2rL \frac{dv}{dr} \rightarrow v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$.

(0'') \rightarrow Débit : $Q_v = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R v(r) r d\theta dr = \frac{2\pi\Delta P}{4\eta l} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi\Delta P}{8\eta L} R^4$. Alors,

Vitesse moyenne : $v_{\text{moy}} = D_v / \pi R^2 = \frac{\Delta P}{8\eta L} R^2$, résistance à l'écoulement : $R = \frac{\Delta P}{Q_v} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

Conduits en série : $R = \sum R_k, \Delta P = D_v \sum R_k$. Conduits // : $R^{-1} = \sum R_k^{-1}, D_v = \Delta P \sum R_k^{-1}$.

Diagramme des vitesses

dans ce **cylindre** d'axe **Ox**,
de **longueur L** et **rayon R** :

Paraboloïde $x = v \left(\sqrt{y^2 + z^2} \right) \rightarrow$

avec $v(0) = v_{\text{max}} = \frac{\Delta P}{4\eta L} R^2$

et $v(R) = 0$ (aux bords).

