Probabilités – Statistiques

Fiche M12 – Dénombrement, lois discrètes

Définitions

- **Dénombrement** *(Pour* $\boldsymbol{n, p} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{2}$ *et* $\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{n}$*)*

  . Nombre de **permutations** de **n éléments** : **n !**.

  . Nombre d'**arrangements** de **p éléments distincts** sur **n** : $\frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-p)!}} = n(n-1)...(n-p+1)$.

  . Nombre de **combinaisons** de **p éléments** dans **n éléments** : $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{p!(n-p)!}}$.

- **Probabilités** *(**probabilité** d'un **évènement** **X** dans un **univers*** $\boldsymbol{\Omega}$ *:* $\boldsymbol{p(X)} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$*)*

  Probabilité **conditionnelle** : probabilité de l'évènement **A** ayant l'évènement **B**, *donc* *si* $p(B) \neq 0$: $\mathbf{p(A/B)} = \frac{\mathbf{p(A\cap B)}}{\mathbf{p(B)}} = \frac{\mathbf{p(A)p(B/A)}}{\mathbf{p(B)}}$ et *si* $p(A) \neq 0$: $\mathbf{p(B/A)} = \frac{\mathbf{p(A\cap B)}}{\mathbf{p(A)}}$: **(Bayes)**
  $\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$, $\mathbf{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$.
  A et B évènements indépendants $\rightarrow$ $\mathbf{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$.
  Pour **A**, **suite** d'**évènements** $(\mathbf{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{p}(\bigcup_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \mathbf{A_n}) \leq \sum_{\mathbf{k=0}}^{+\infty} \mathbf{p(A_k)}$.
  Pour **A suite** d'**évènements** deux à deux **disjoints**, $\mathbf{p}(\bigcup_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \mathbf{A_n}) = \sum_{\mathbf{k=0}}^{+\infty} \mathbf{p(A_k)}$.
  Pour **A suite** d'**évènements croissante** pour **l'inclusion**, $\mathbf{p(A_n)} \xrightarrow[\mathbf{n\to+\infty}]{} \mathbf{p}(\bigcup_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \mathbf{A_n})$.
  Pour **A suite** d'**évènements décroissante** pour **l'inclusion**, $\mathbf{p(A_n)} \xrightarrow[\mathbf{n\to+\infty}]{} \mathbf{p}(\bigcap_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \mathbf{A_n})$

- **Lois** de **probabilités discrètes (P.discr)**

  Ce sont des **lois** de **probabilités** de **variable aléatoire X** pouvant prendre un nombre **fini** de valeurs, $\mathbf{X}_{\mathbf{i = 1, 2, ..., n}}$ associées à leur probabilité $\mathbf{P}_{\mathbf{i = 1, 2, ..., n}}$ ayant pour **espérance**, $\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{P_i \times X_i}$, **variance** : $\mathbf{V} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{P_i} \times \mathbf{(X_i - E)^2}$.
  et **écart-type** : $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\mathbf{V}}$. Ayant $V = \sum_{i=1}^{n} P_i \times (X_i^2 + E^2 - 2EX_i)$,
  $V = \sum_{i=1}^{n} P_i \times X_i{}^2 + E^2 \times \sum_{i=1}^{n} P_i - 2E \times \sum_{i=1}^{n} P_i \times X_i$ *et comme* $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$,
  $E = \sum_{i=1}^{n} P_i \times X_i \rightarrow \boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{n} P_i \times X_i{}^2 + E^2 - 2E^2 = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{P_i} \times \boldsymbol{X_i}{}^2 - \boldsymbol{E}^2$.

  Pour deux réels $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ et une variable aléatoire **X**, $\mathbf{E(\lambda X + \mu) = \lambda E(X) + \mu}$,
  Pour deux variables aléatoires **X** et **Y**, **E(X + Y) = E(X) + E(Y) – cov(X, Y)**, où **cov(X, Y) = E(XY) – E(X) × E(Y)**, **nul** en particulier si **X** et **Y** sont **indépendantes**.

- **Moment** d'**ordre m** $\in \mathbb{N}^*$ de la variable **X**, s'il existe : $\mathbf{M_m = E(X^m)}$ *(*$\rightarrow \boldsymbol{V = M_2 - M_1{}^2}$*)*.

- **Fonction génératrice** $\mathbf{G_X(t)} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \mathbf{p(X = n)\, t^n}$ *(de rayon de convergence* ≥ 1*)* **(Fgén)**

Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Etude** de l'**évolution** d'une **variable** de valeur initiale **nulle** et évoluant à chaque **étape** de façon **équiprobable** de **+1** ou bien de **– 1**. Une **modélisation** possible est la suite **x** de relation de récurrence : $\mathbf{x_{n+1} = x_n + 2 \times E(rnd(2)) - 1}$: **(R)**, avec $\mathbf{x_0 = 0}$, ***E** est la fonction **partie entière** et **rnd(2)** est un **réel aléatoire** de **]0, 2[**.*
  Soit **X** variable aléatoire valeur de $\mathbf{10 + x_N / 2}$ et **p(X = k)** : **probabilité** de $\mathbf{x_N = 2k - 20}$
  Le programme ci-dessous établit **10 essais** de **1000 répétitions** de séries $\mathbf{x_{i \in [\![0, N=20]\!]}}$:
  Pour ces **boucles** de **N étapes**, partant de $\mathbf{x_0 = 0}$ et évoluant chaque fois de **+1** ou **–1**, la **position finale** $\mathbf{x_N}$ est à *valeur* dans :
  {-N ; -N + 2 ; ... ; 0 ; 2 ; ... ; N} si N pair,
  {-N ; -N + 2 ; ... ; 1 ; 3 ; ... ; N} si N impair.

```python
from pylab import *

essai = 0
while essai < 10:
    j, x, y, z = 0, 0, 0, 0
    compteur = zeros((21, 1))
    while j < 1000:
        x = 0
        import random
        for i in range(1, 21):
            r = random.random()
            s = 2 * int(2 * r) - 1
            x += s
        y = 10 + x * 0.5
        z = round(y)
        compteur[z] += 1
        j += 1
    for k in range(21):
        print int(round(compteur[k])),
    print
    essai += 1
```

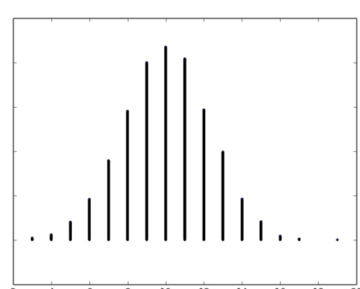
  Et, ayant $\binom{N}{k}$ **combinaisons** de **k étapes** dont l'évolution est **+ 1** *(les **n – k** autres évoluant nécessairement de **-1**)* parmi **N**, la **loi** est **binomiale** : $\mathcal{B}$ **(20 ; 0,5)** et comme la somme de ces parties est $\mathbf{2^N}$ *(également **nombre** de **possibilités** de **N étapes** de **2 évènements équiprobables**)* $\mathbf{p(X = k) = \binom{N}{k}/2^N}$. *Ainsi, par exemple :*
  <u>$x_N = 0$</u> : $p(X = 10) = \binom{20}{10}/2^{20} \approx 17{,}62\ \%$
  <u>$x_N = 4$</u> : $p(X = 6) = p(X = 14) = \binom{20}{4}/2^{20}$.

k :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0	0	0	1	3	18	46	72	124	154	183	161	102	71	44	14	5	0	1	1	0
	0	0	0	0	4	20	32	65	110	165	188	155	108	90	40	20	1	1	1	0	0
	0	0	0	1	4	17	35	92	114	166	183	136	112	67	53	15	4	1	0	0	0
	0	0	0	2	5	11	32	75	121	168	165	162	114	90	38	9	8	0	0	0	0
	0	0	0	3	9	21	28	64	103	165	180	171	126	70	39	18	2	1	0	0	0
	0	0	0	1	2	22	39	78	114	160	181	146	128	72	40	10	6	1	0	0	0
	0	0	0	1	9	18	24	78	117	171	166	155	123	72	36	21	8	1	0	0	0
	0	0	0	2	3	16	34	65	120	172	184	135	118	93	35	14	5	3	0	1	0
	0	0	0	2	4	17	22	77	130	167	176	138	127	77	34	22	4	3	0	0	0
	0	0	1	1	2	13	47	85	117	155	187	173	114	60	28	13	3	1	0	0	0

<u>10 essais de 1000 occurrences pour N = 20</u>

<u>Exemple de graphe pour 5000 occurrences</u>

*(Cf. **théorème** de **Moivre – Laplace**)*



- **Calculs** de **fonctions génératrices G_X** puis des **variances** de **variables aléatoires X** *(Cf. (Fgén), (P.discr) et lois correspondantes) Les* ***G_X*** *pour ces lois étant* ***$C^2(Déf(G_X))$***.

  Loi de Bernoulli :
  $\forall\, \mathbf{t} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{G_X(t) = (1 - p).1 + p.t = 1 - p + pt}$. $\mathbf{G_X'(t) = p}$, $\mathbf{G_X''(t) = 0}$.

  Loi Binomiale :
  $\forall\, \mathbf{t} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{G_X(t)} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} (\mathbf{1-p})^{\mathbf{n-k}}(\mathbf{pt})^{\mathbf{k}} = \mathbf{(1 - p + pt)^n}$.
  $\mathbf{G_X'(t) = np(1 - p + pt)^{n-1}}$, $\mathbf{G_X''(t) = n(n-1)p^2(1 - p + pt)^{n-2}}$.
  Loi de Poisson :
  $\forall\, \mathbf{t} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{G_X(t)} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{+\infty} \mathbf{e^{-\lambda}} (\boldsymbol{\lambda}\mathbf{t})^{\mathbf{k}}/\mathbf{k!} = \mathbf{e^{-\lambda}} \sum_{\mathbf{k=0}}^{+\infty} (\boldsymbol{\lambda}\mathbf{t})^{\mathbf{k}}/\mathbf{k!} = \mathbf{e^{\lambda(t-1)}}$.
  $\mathbf{G_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}}$, $\mathbf{G_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}}$.
  Loi géométrique : $\mathbf{0 < p < 1}$ et $\forall\, \mathbf{t} \in \mathbb{R}$, $|\mathbf{t}| < \mathbf{1/(1-p)}$
  $\mathbf{G_X(t)} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{+\infty} \mathbf{p(1-p)^{k-1}t^k} = (\mathbf{p/1-p}) \sum_{\mathbf{k=0}}^{+\infty} \left((\mathbf{1-p})\mathbf{t}\right)^{\mathbf{k}} = \mathbf{pt/(1+(p-1)t)}$.
  $\mathbf{G_X'(t)} = (\mathrm{p}(1+(\mathrm{p}-1)\mathrm{t}) - \mathrm{p}(\mathrm{p}-1)\mathrm{t})/(1+(\mathrm{p}-1)\mathrm{t})^2 = \mathbf{p/(1+(p-1)t)^2}$,
  $\mathbf{G_X''(t) = -2p(p-1)/(1+(p-1)t)^3}$.

  Montrer que pour des **fonctions génératrices deux fois dérivables** en **1**, la **variance**, $\mathbf{V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2}$. En déduire les **variances** pour chacune de ces **lois**.

- **1. Dénombrement 1**

  Soit **E** et **F** ensembles de nombres distincts, de **cardinaux** respectifs $\mathbf{p}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{p \leq n}$.
  Prouver que le **nombre** des **applications strictement croissantes** de $\mathbf{E \to F}$ est $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{p}}$ et **celui** des **applications croissantes** de $\mathbf{E \to F}$ est $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{p-k}\binom{p}{k} = \binom{\mathbf{n+p}}{\mathbf{p}}$.

- **2. Dénombrement 2**

  Soit $\mathbf{\Gamma_p^n}$ le nombre de **combinaisons** de **p** éléments éventuellement répétés choisis parmi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$ éléments ***(p < n)***. On dispose de **p** objets à placer dans **n** rangements (éventuellement plusieurs par rangement). Pour **n** = **10**, écrire en **code bits** deux objets dans le 3ème rangement, un dans le 5ème et trois dans le 9ème.
  Exemple : Pour 5 rangements, 2 objets dans le 3ème et 1 dans le 5ème s'écrit : 001101.
  Déduire le nombre $\mathbf{\Gamma_6^{10}}$ puis **généraliser** pour $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$ à $\mathbf{\Gamma_p^n}$. Montrer que le **nombre** de **p-uplets** $(\mathbf{x_i})_{\mathbf{i} \in [\![\mathbf{1,n}]\!]}$ ($\mathbf{x_i} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$) **solutions** de l'équation $\mathbf{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p}$ est $\mathbf{\Gamma_p^n}$.

- **3. Dénombrement 3**

  Soit **E = {1 ; 2 ; ... ; n}**. Donc **Card (E) = n** $\in \mathbb{N}^*$. Un **dérangement** de tout ensemble $\mathbf{F_p}$ de cardinal $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^*$ est une **permutation** pour laquelle aucun des **p** éléments permutés d'un **p-uplet** *(ensemble de p éléments)* de $\mathbf{F_p}$ n'est à la même place.
  Exemple : d : $F_3 \to F_3$ avec $F_3 = \{a_1 ; a_2 ; a_3\}$ et d : $(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$.
  Soit $\mathbf{D_p}$ le **nombre** de ces **dérangements** pour un ensemble $\mathbf{F_p}$ de cardinal $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^*$.
  Déterminer $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$, $\mathbf{D_3}$.
  Combien y a-t-il de **permutations** de **E** laissant **invariants** exactement $\mathbf{k \leq n}$ **éléments** ? En déduire que $\mathbf{n\,! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k}$ puis déterminer $\mathbf{D_4}$ et $\mathbf{D_5}$.

Formules, équations

- **Loi uniforme discrète** *($n \in \mathbb{N}^*$)* : $\forall\, \mathbf{k} \in [\![\mathbf{1}, \mathbf{n}]\!]$, $\mathbf{p(X = k) = 1/n}$,
  Espérance : $\mathbf{E(X) = (n+1)/2}$, **variance** : $\mathbf{V(X) = (n^2-1)/12}$.
  $\rightarrow$ Ecart-type : $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}} = \sqrt{\mathbf{(n^2-1)/12}}$.

- **Loi** de **Bernoulli** $\boldsymbol{\mathcal{B}}$**(p)** *($p \in]0, 1[$)* : $\mathbf{p(X=0) = 1-p}$, $\mathbf{p(X = 1) = p}$ et $\mathbf{p(X \neq 0, 1) = 0}$
  Espérance : $\mathbf{E(X) = p}$, **variance :** $\mathbf{V(X) = p(1-p)}$ $\rightarrow$ **Ecart-type** : $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}} = \sqrt{\mathbf{p(1-p)}}$

- **Loi binomiale** $\boldsymbol{\mathcal{B}}$**(n,p)** **(**$\boldsymbol{\mathcal{B}}$**)** succession de $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$ épreuves indépendantes de **Bernoulli** pour lesquelles il y a **succès** de probabilité : $\mathbf{p} \in \mathbf{]0, 1[}$ ou bien **échec** de probabilité : $\mathbf{q = 1-p}$. La loi **binomiale** $\boldsymbol{\mathcal{B}}$**(n, p)** de la **variable aléatoire** des succès, **X**, vérifie :
  Probabilité de **k succès**, **n – k échecs**, pour $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ **possibilités** : $\mathbf{p(X = k)} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\mathbf{p^k q^{n-k}}$.
  On vérifie $\sum_{k=0}^{n} p(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1$ *car* $p + q = 1$
  . **Espérance** : $\mathbf{E(X)} = \sum_{k=0}^{n} p(X = k) \times k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \times k = \mathbf{np}$.
  <u>Dém</u> : Soit $\boldsymbol{f}$ *la fonction à deux variables réelles, d'expression :* $\boldsymbol{f(x, y) = (x + y)^n}$.
  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = n.(x + y)^{n-1}$. *(*f *est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^2$*). Comme* $\boldsymbol{f(x, y)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \boldsymbol{x^k y^{n-k}}$,
  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1} y^{n-k} \times k$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \times k = n.(x + y)^{n-1} \times x$.
  Alors, pour $\boldsymbol{x = p} \in [0; 1]$ *et* $\boldsymbol{y = q = 1-p}$,
  $\boldsymbol{E(X)} = \sum_{k=0}^{n} p(X = k) \times k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \times k = n(p+q)^{n-1} \times p = \boldsymbol{np}$ *car* $p + q = 1$
  . **Variance** : $\mathbf{V(X)} = \sum_{k=0}^{n} p(X = k) \times (k - E(X))^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{p^k q^{n-k}} \times \mathbf{(k - np)^2}$.
  $\rightarrow$ $\mathbf{V(X) = np(1-p)}$ $\rightarrow$ **Ecart-type** : $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}} = \sqrt{\mathbf{np(1-p)}}$.

- **Loi géométrique G(p)** avec $\mathbf{p} \in \mathbf{]0, 1[}$: $\forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{p(X = k) = (1-p)^{k-1} p}$.
  On vérifie $\sum_{k=1}^{+\infty} p(X = k) = p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} = p/(1-(1-p)) = 1$.
  . **Espérance** : $\mathbf{E(X)} = p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{k-1} \times k = \mathbf{1/p}$.
  <u>Dém</u> : $E(X) = p \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (1-p)^{k-1} \times k$. *Soit* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$,
  Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, S_n *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \times k = \sum_{k=0}^{n} x^{k-1} \times k$.
  Et, par ailleurs, $S_n(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ *donc,* $S_n'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$
  Alors en identifiant $pS_n'(1-p) = p\,\frac{(n+1)(1-p)^n(-p)-((1-p)^{n+1}-1)}{p^2}$
  Soit, $pS_n'(1-p) = \frac{(1-p)^n(-p(n+1)-(1-p))+1}{p} = \frac{1-(1-p)^n(1+pn)}{p}$
  Donc, comme $n^k.x^n \rightarrow 0$, *pour* $x \in]0; 1[$ *et* $k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{E(X)} = \lim\limits_{n \to +\infty} pS_n'(1-p) = \boldsymbol{1/p}$
  Variance : $\mathbf{V(X)} = p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{k-1} \times (k - 1/p)^2 = \mathbf{(1-p)/p^2}$.
  $\rightarrow$ **Ecart-type** : $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}} = \sqrt{\mathbf{(1-p)/p^2}}$.

Démonstration : on utilise la formule V(X) = p. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{k-1} \times k^2 - E^2(X)$

$S_n''(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-2} \times k(k-1) = \sum_{k=0}^{n} x^{k-2} \times k(k-1) = \sum_{k=0}^{n} x^{k-2} \times (k^2-k)$

(∀ n ∈ ℕ, S_n étant bien deux fois dérivable sur ℝ.) et* $S_n''(x) =$

$$\frac{\Big((n+1)nx^{n-1}(x-1)+(n+1)x^n-(n+1)x^n\Big)(x-1)^2-2(x-1)\Big((n+1)x^n(x-1)-\big(x^{n+1}-1\big)\Big)}{(x-1)^4}$$

$$\to S_n''(x) = \frac{\Big((n+1)nx^{n-1}(x-1)\Big)(x-1)-2\Big((n+1)x^n(x-1)-\big(x^{n+1}-1\big)\Big)}{(x-1)^3}.$$

Donc, $S_n''(1-p) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 2/p^3$*. Or,* $\sum_{k=1}^{n} x^{k-2} \times k^2 = S_n''(x) + \sum_{k=1}^{n} x^{k-2} \times k = S_n''(x) + \frac{1}{x}$

$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \times k = S_n''(x) + S_n'(x)\,/\,x.$

$\to V(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} p(1-p)S_n''(1-p) + pS_n'(1-p) - 1/p^2$ *. Soit :*

V(X) $= 2p(1-p)/p^3 + p/p^2 - 1/p^2 = 2/p^2 - 2/p + 1/p - 1/p^2 = \mathbf{(1-p)/p^2}$.

Avec la fonction limite d'expression S(x) = $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$ *le calcul aurait été plus rapide mais la suite (S_n) de fonctions de classe C^∞ ne converge pas uniformément sur* $]0,1[$*. La suite de fonctions (R_n) / $R_n(x)$ =* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = x^{n+1}.\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = x^{n+1}/(1-x)$ *ne peut en effet être majorée par une suite convergente vers 0 et indépendante de x.*

- **Loi** de **Poisson P(λ)** : ∀ **k** ∈ ℕ, $\mathbf{p(X=k) = e^{-\lambda} \times \lambda^k / k!}$.

  On vérifie $\sum_{k=0}^{+\infty} p(X=k) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k / k! = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = 1.$

  → **Espérance** : **E(X)** = $e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \times \lambda^k / (k-1)! = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k+1} / k!$

  Soit **E(X)** = $\lambda \times e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k / k! = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} \times \lambda = \boldsymbol{\lambda}$.

  → **Variance** : **V(X)** = $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \times \lambda^k (k-\lambda)^2 / k!$ **= λ** et l'**écart-type** : $\boldsymbol{\sigma_X = \sqrt{\lambda}}$.

- **X** admet une **espérance E(X)** ⟺ **G_X** est **dérivable** en **1** et dans ce cas **E(X) = G_X'(1)**.

  Si **X** et **Y** sont **deux variables aléatoires réelles discrètes** à **valeurs** dans ℕ :

  . **$G_X = G_Y$ ⟺ X** et **Y ont** la **même loi. (GX)**

  . Si elles sont **indépendantes**, alors on vérifie **$G_{X+Y} = G_XG_Y$**.

- **Approximation** de la **loi binomiale** par la **loi de Poisson**

  Si ∀ **n** ∈ ℕ, **X_n** → $\boldsymbol{\mathcal{B}(n, p_n)}$ et $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} n.p_n = \lambda}$, alors ∀ **k** ∈ ℕ,

  $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} p(X_n = k) = e^{-\lambda} \times \lambda^k / k!}$.

- **Loi faible** des **grands nombres** MP

  Si $(\mathbf{X_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de **variables aléatoires** d'**évènements** deux à deux **indépendantes** et de **même loi** admettant un **moment** d'**ordre 2**, ayant ∀ **n** ∈ ℕ*, $\mathbf{S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k}$, ∀ **i** ∈ ⟦1, n⟧, **E($X_i$) = m**, **σ = σ($X_i$)**, alors ∀ **ε** > 0,

  $\mathbf{p\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \sigma^2/n\varepsilon^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

- **Lois** à **densité** *(absolument continues)* **Cp^t**

. **Densité** : **f** fonction positive continue presque partout sur ℝ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

. **Espérance** : $\mathbf{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times x\, dx}$, variance $\mathbf{V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times \left(x - E(X)\right)^2 dx}$
De même que pour les lois discrètes, $\mathbf{V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times x^2 dx - E(X)^2}$.

. **Loi uniforme continue** : densité de la loi de probabilité, $\mathbf{f(x) = \frac{1}{b-a}}$ sur [a ; b], **0** sinon.
Pour $x_1 \leq X \leq x_2$: $\mathbf{P(x_1 \leq X \leq x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \mathbf{\frac{x_2 - x_1}{b-a}}$ si $[x_1 \,;\, x_2] \subset [a \,;\, b]$.
Remarque : si $x_1 \in [a \,;\, b]$ *et* $x_2 > b$, $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{b} f(x)dx = \frac{b - x_1}{b-a}$.

. **Loi exponentielle** : densité de la loi de probabilité, $\mathbf{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$ si $x \geq 0$, **0** sinon.
$\mathbf{P(X \leq x_0)} = \int_0^{x_0} f(x)dx \mathbf{= 1 - e^{-\lambda x_0}}$, $\mathbf{P(x_1 \leq X \leq x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \mathbf{= e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}}$.

. **Loi normale** $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma^2})$ *(probabilité **P**)*
Densité de la loi de probabilité, $\mathbf{f(x) = e^{-(x-\mu)^2/2\sigma} / \sigma\sqrt{2\pi}}$
X : variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \rightarrow \mathbf{E(X) = \mu}$ et $\mathbf{V(X) = \sigma^2}$
$\rightarrow \mathbf{Y = \frac{X-\mu}{\sigma}}$ est une variable aléatoire suivant la **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$
$\mathbf{P(X \leq b) = \left(1/\sigma\sqrt{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{b} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma} dx}$
$\mathbf{P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a),\ P(X > b) = 1 - P(X \leq b)}$
$\mathbf{P(\mu - h \leq X \leq \mu + h) = 2(\Pi(h/\sigma) - 0{,}5)}$
. *Valeurs Probabilités de* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0{,}68$,
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}95$ *et* $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}997$

. *En intégrant par anneaux concentriques dans un plan (rayons r, épaisseur dr et donc élément infinitésimal de surface dS = rdθdr),* $I_{plan} = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta dr$.
$\rightarrow I_{plan} = \pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2}.2rdr = \pi\left[-e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} = \pi$. *Et également, en intégrant sur le plan en cartésiennes* ($x^2 + y^2 = r^2$ *et élément infinitésimal de surface dS = dxdy),*
$I_{plan} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2$.
Alors, $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$, *puis* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx = 1$ *et avec le changement de variable,*
$u = x\sqrt{2}$, *ayant* $dx = du / \sqrt{2}$, *on obtient* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du = 1 : \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(u) du = 1$.

Pour $\boldsymbol{\mathcal{N}(\mu, \sigma)}$, *avec le changement de variables* $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\frac{e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2/2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = 1}$.
*Les fonctions étant en outre continues presque partout (car continues) sur ℝ et positives, sont donc bien des **densités** pour ces **lois normales**.*

Exercices d'application et grands classiques

Énoncés : *Pour* $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}$ ***entiers positifs***, $\boldsymbol{k \leq n}$.

- **1. Dénombrement 1**

  Montrer que $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k+1}} + \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{k+1}}$ et $\binom{\mathbf{n-1}}{\mathbf{k-1}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$.

- **2. Dénombrement 2**. *On utilisera les formules du (Binome) (Cf. fiche* ***M9****)*
  et de la fonction $x \longmapsto (1+x)^n - 1$.

  Soit un ensemble **E** de cardinal $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, calculer la **somme** des **cardinaux** de tous les **sous-ensembles possibles** de **E**, $\sum_{\mathbf{A \subset E}} \mathbf{Card}(\mathbf{A})$.
  Déterminer le **nombre** $\mathbf{n_c}$, de sous-ensembles **B** non vides de sous-ensembles **A** non vides inclus dans **E**, $(\boldsymbol{n_c} = \sum_{\boldsymbol{B \subset A \subset E}} \mathbf{1})$, puis calculer $\mathbf{c_{B \subset A \subset E}} = \sum_{\mathbf{B \subset A \subset E}} \mathbf{Card}(\mathbf{B})$.

- **3. Dénombrement 3**

  Soient **E**, **F** deux **ensembles** et **n** entier **supérieur** à **4** tels que
  Card (E) = n + 4 et **Card (F) = n**.
  Quel est le **nombre** d'**applications surjectives** de **E** $\rightarrow$ **F** ? *(Cf. fiche* ***M13****)*

- **4.** Une **urne** contient **n boules blanches** et **n boules rouges** *(*$\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$*)*.
  On en tire **n boules**. Soit **X** le **nombre** de **boules rouges obtenues**.
  Déterminer La **loi** de **X**, **p(X = k)** puis vérifier que son **espérance** est $\mathbf{E = n/2}$.
  On utilisera la formule (VdM) (Cf. fiche ***M9****).*

- **5.** Une **variable aléatoire X** suit la **loi binomiale B(n, p)** (où $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{p} \in \mathbf{]0, 1[}$).
  Une autre **variable aléatoire**, **Y**, **indépendante** de **X** suit la **loi binomiale B(m, p)** (où $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^*$).

  . Déterminer la **loi** suivie par la **variable aléatoire Z = X + Y**.
  . Déterminer la **loi** suivie par la **variable W = 1 / (X + 1)**, puis son **espérance E**.

- **6.** Soit $(c, \lambda) \in]0,1[^2$ et une **suite** de **variables aléatoires** $(\mathbf{X_n})$ telles que $\mathbf{X_0 = c}$,
  $\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P(X_{n+1} = \lambda + (1-\lambda)x \mid X_n = x) = x}$ et $\mathbf{P(X_{n+1} = (1-\lambda)x \mid X_n = x) = 1 - x}$.
  On notera $(\boldsymbol{x_n})_{\mathbb{N}}$ *la suite de valeurs réelles prises par* $(\boldsymbol{X_n})$.

  . Montrer que $\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E(X_n) = c}$ et $\mathbf{E(X_{n+1}^2) = (1-\lambda^2)E(X_n^2) + c\lambda^2}$.
  . Montrer que $\forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^*$, la **suite** des **moments** $\mathbf{m_k} = \left(\mathbf{E}\left(\mathbf{X_n}^{\mathbf{k}}\right)\right)_{\mathbb{N}}$ **converge** vers **c**.
  . En déduire que $\mathbf{X_n}$ **converge** en **loi** vers une **loi** de **Bernoulli** de paramètre **c**.
  (Cf. (GX)) (Cf. X – Oral).

Corrigés *(Cf. (P.discr)) Pour* ***k***, ***n entiers positifs***, $\boldsymbol{k \leq n}$.

- **1.** Relation du **triangle** de **Pascal** : $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!}$,

  $\rightarrow \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k+1}} + \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{k+1}}$

  $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \frac{n+1}{k+1}\,\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$, ou encore :

  $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k+1}}{\mathbf{n+1}}\binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{k+1}}$ et également, pour **k**, **n** entiers strictement positifs, $\binom{\mathbf{n-1}}{\mathbf{k-1}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$.

- **2. Dénombrement 2**. *(Cf. fiche* ***M9****)*

  Il y a $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ **parties** à **k** éléments dans **E** $\rightarrow \sum_{A\subset E} \mathbf{Card}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{k}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \mathbf{n.2^{n-1}}$.

  Il y a de même $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k_A}}$ **possibilités** de **A** ⊂ **E**, puis $\binom{\mathbf{k_A}}{\mathbf{k_B}}$ **possibilités** de **B** ⊂ **A**

  $(\boldsymbol{k_A} = Card(A), \boldsymbol{k_B} = Card(B))$. Donc, le **nombre** de **B possibles** est *(Cf. (Binôme))*

  $\mathbf{n_c} = \sum_{k_A=1}^{n}\binom{n}{k_A}\sum_{k_B=1}^{k_A}\binom{k_A}{k_B} = \sum_{k_A=1}^{n}\binom{n}{k_A}\left(2^{k_A}-1\right) = 3^n - 1 - (2^n - 1) = \mathbf{3^n - 2^n}$.

  On **multiplie** son **cardinal** à chaque **B** ⊂ **A** dans la **somme** qui précède et on obtient :

  $\mathbf{c_{B\subset A\subset E}} = \sum_{B\subset A\subset E}\mathbf{Card}(\mathbf{B}) = \sum_{k_A=1}^{n}\binom{n}{k_A}\sum_{k_B=1}^{k_A} k_B\binom{k_A}{k_B} = \sum_{k_A=1}^{n}\binom{n}{k_A} k_A\left(2^{k_A}-1\right)$.

  En dérivant $x \longmapsto (1+x)^n - 1 = \sum_{k_A=1}^{n}\binom{n}{k_A}x^{k_A}$, $\sum_{k_A=1}^{n}\binom{n}{k_A}k_A 2^{k_A} = \mathbf{n.3^{n-1}}$.

  Puis, $\mathbf{c_{B\subset A\subset E}} = \mathbf{n}\left(\mathbf{3^{n-1} - 2^{n-1}}\right)$.

  Déterminer les ***possibilités*** *de* $\boldsymbol{A \cap B}$ *pour* $\boldsymbol{A, B \subset E}$*, puis* $\sum_{A,B\subset E} \boldsymbol{Card}(\boldsymbol{A \cap B})$.

- **3. Dénombrement 3**.

  Les **possibilités** d'**applications surjectives** en **nombres** d'**éléments** de **E**
  avec leur **multiplicité** vers chaque **élément** de **F** sont *(Card(F) =* ***n*** *≥ 4)* :
  <u>**a.**</u> **1** de **cinq** et **n – 1** de **un** ; <u>**b.**</u> **1** de **quatre**, **1** de **deux** et **n – 2** de **un** ; <u>**c.**</u> **2** de **trois** et **n – 2** de **un** ; <u>**d.**</u> **1** de **trois**, **2** de **deux** et **n – 3** de **un** ; <u>**e.**</u> **4** de **deux** et **n – 4** de **un**.

  → **Nombres** de ces **possibilités** *(pour* ***n*** *≥* ***4****,* ***combinaisons*** *dans chaque ensemble pour les éléments multiples de* ***E*** *liés à* ***1*** *élément de* ***F*** *et* ***bijections*** *entre les autres)* :

  <u>**a.**</u> $\binom{n+4}{5}\binom{n}{1}(n-1)!$; <u>**b.**</u> $\binom{n+4}{4}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n-1}{1}(n-2)!$; <u>**c.**</u> $\binom{n+4}{3}\binom{n}{1}\binom{n+1}{3}\binom{n-1}{1}(n-2)!$;
  <u>**d.**</u> $\binom{n+4}{3}\binom{n}{1}\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{1}(n-3)!$; <u>**e.**</u> $\binom{n+4}{2}\binom{n}{1}\binom{n+2}{2}\binom{n-1}{1}\binom{n}{2}\binom{n-2}{1}\binom{n-2}{2}\binom{n-3}{1}(n-4)!$

  <u>*Remarque*</u> *: l'****ordre*** *de considération des éléments* ***ne change pas*** *les* ***résultats****.*

- **4.** La **loi** de **X** vérifie $\mathbf{p(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}}$ car **n** boules sont prélevées sur les 2n de l'urne : $\binom{2n}{n}$ *possibilités* et **k** boules rouges sont prélevées sur les **n** : $\binom{n}{k}$ *possibilités*, le tirage étant constitué de **n** boules, **n – k** boules noires sont prélevées sur les $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$: $\binom{n}{n-k}$ *possibilités.*

  → On vérifie que $\mathbf{E = n/2}$. (car il y a n boules blanches et n boules rouges) :

  $$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k} = \frac{n\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \mathbf{\frac{n}{2}}$$

  puisque $\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n\times(n-1)!}{k\times(k-1)!\times(n-1-k+1)!} = \binom{n}{k}$ et d'après la formule proposée : $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n}{n-1-k} = \binom{2n-1}{n-1}$ trouvée en identifiant le coefficient en x^{n-1} de chacun des termes de l'égalité : $(1+x)^{2n-1} = (1+x)^{n-1}(1+x)^{n}$.

  <u>Remarque</u> : On peut retrouver la relation (VdM) avec l'ensemble $E = A \cup B$ ($Card(E) = n + p$), avec $Card(A) = n \in \mathbb{N}^*$ et $Card(B) = p \in \mathbb{N}^*$, $A \cap B = \emptyset$ en considérant les parties $X = Y \cup Z \subset E$, telles que $Card(X) = k$ avec $Y \subset A$ et $Z \subset B$.

- **5. Loi** suivie par la **variable aléatoire Z = X + Y**. *(Cf. (B))*

  $\mathbf{p(Z = j)} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{j}} \mathbf{p(X = k)p(Z = j|X = k)}$, avec $\mathbf{p(X = k)} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\mathbf{p^k(1-p)^{n-k}}$,
  $p(Z = j|X = k) = p(Y = j - k|X = k) = p(Y = j - k)$ car **X** et **Y** sont indépendantes.
  Alors, comme $\mathbf{p(Y = j - k)} = \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{j-k}}\mathbf{p^{j-k}(1-p)^{m-j+k}}$, on obtient :

  $$\mathbf{p(Z = j)} = \sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{m}{j-k}p^{k+j-k}(1-p)^{n-k+m-j+k} = \sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{m}{j-k}p^{j}(1-p)^{n+m-j}$$

  Soit : $\mathbf{p(Z = j)} = p^j(1-p)^{n+m-j}\sum_{k=0}^{j}\binom{n}{k}\binom{m}{j-k} = \mathbf{p^j(1-p)^{n+m-j}}\binom{\mathbf{n+m}}{\mathbf{j}}$ *(Cf. (VdM)).*

  Z suit donc **également** une **loi binomiale** : **B(n + m, p)**.

  . **Espérance E** de la **variable aléatoire W = 1 / (X + 1)**.

  Comme $\mathbf{p(X = k)} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\mathbf{p^k(1-p)^{n-k}}$, $\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\mathbf{p^k(1-p)^{n-k}/(k+1)}$.

  Ayant $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)\times n!}{(k+1)\times k!\times(n+1-k-1)!} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$, on obtient :

  $$\mathbf{E} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{1}{(n+1)p}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{n+1-k}.$$

  Donc, $\mathbf{E} = \frac{1}{(n+1)p}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1}\right) = \mathbf{\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}}$.

- **6.** Par **récurrence**, $\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E(X_n) = c}$, puis $\mathbf{E(X_{n+1}^2) = (1-\lambda^2)E(X_n^2) + c\lambda^2}$ car :
  $X_{n+1}^2 = x_n(\lambda + (1-\lambda)X_n)^2\ (1-x_n)(1-\lambda)^2X_n^2 \rightarrow E(X_{n+1}^2) = (1-\lambda^2)E(X_n^2) + \lambda^2E(X_n)$.
  Ayant $\forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{X_{n+1}^k = x_n(\lambda + (1-\lambda)X_n)^k + (1-x_n)((1-\lambda)X_n)^k}$, $\mathbf{(c,\lambda) \in]0,1[^2}$, la **suite** $\mathbf{m_k} = \left(\mathbf{E(X_n^k)}\right)_{\mathbb{N}}$ **converge** vers **c**. Une **loi** de **Bernoulli** a un **support {0, 1}** et se **caractérise** par tous ses **moments égaux** à un **même** nombre $\mathbf{p} \in \mathbf{]0,1[}$, qui est son **paramètre**. $\mathbf{X_n}$ **converge** donc en **loi** vers une **loi de Bernoulli** de **paramètre c**.