

MÉMO DES CONCOURS D'ENTRÉE AUX GRANDES ÉCOLES D'INGÉNIEURS

*Fiches de cours, TP et exercices
en mathématiques, physique et chimie*

Édition 2022

Errata et bonus

Filière MPSI, MP2I / MP, MPI :



Filière PCSI / PC :



Filière MPSI, PCSI, PTSI / PSI, PT, TSI :



Compléments :



Fiche M1 – Topologie et ensembles

- Ouvert A** de E : sous – ensemble de E qui est voisinage de chacun de ses points. Il correspond à son intérieur $\overset{\circ}{A}$, ne contenant aucun point de sa frontière, $\text{Fr } A$ (notée également « $\text{Fr}(A)$ » ou « ∂A »). $\text{Fr } A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.
 \overline{A} étant l'adhérence de A : plus petit ensemble fermé contenant A. Pour un espace métrique, il est l'ensemble des limites de suites convergentes à valeurs dans A.
Fermé F de E : sous – ensemble de E, de complémentaire $C_E F = E \setminus F$, ouvert de E.
- Sous-corps J** de \mathbb{K} : partie de \mathbb{K} stable pour les lois + et \times , tel que :
 $1_{\mathbb{K}} \in J$ et $\forall x \in J, -x \in J, \forall x \in J \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, (\exists x^{-1} \in \mathbb{K}) x^{-1} \in J$.
J est lui-même un corps pour les lois + et \times . \mathbb{R} est un sous-corps de \mathbb{C} .
- Toute partie non vide** et majorée de \mathbb{R} admet une **borne supérieure**.
L'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$ n'a pas de borne supérieure.
- Pour \mathbb{K} : **sous-corps** de \mathbb{C} , dans $E = \mathbb{K}\text{-ev}$ de **dimension** $n \in \mathbb{N}^*$,
 $\forall k \in \mathbb{N}^*, \|\cdot\|_k : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (|x_1|^k + \dots + |x_n|^k)^{1/k}$.
 $\|\cdot\|_{\infty} : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sup(|x_1|, \dots, |x_n|)$.
- Propriété** de la **norme infinie** sur un $\mathbb{K}\text{-ev}$ (\mathbb{K} : *sous-corps* de \mathbb{C}) : $\|\cdot\|_{\infty} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\cdot\|_k$:
 Soient $J = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_i| = \|\mathbf{x}\|_{\infty}\}$, $I = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus J$. $p = \text{card}(J) : "[J]"$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
 $\|\mathbf{x}\|_k = \|\mathbf{x}\|_{\infty} (p + \sum_{i \in I} (|x_i|/\|\mathbf{x}\|_{\infty})^k)^{1/k}$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} (p + \sum_{i \in I} (|x_i|/\|\mathbf{x}\|_{\infty})^k)^{1/k} = 1$.

Fiche M5 – Dérivations, intégration et primitives

Formules, propriétés

- Si f : **fonction continue**, g : **fonction intégrable**, de **signe constant** sur $[a, b]$ et **non identiquement nulle**, alors $\exists c \in [a, b] / \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$.

Fiche M9 – Sommations et séries

Formules, propriétés

- Produit de Cauchy** de deux séries **absolument convergentes**, $\sum_{i \geq 0} u_i$ et $\sum_{j \geq 0} v_j$, la série $\sum_{k \geq 0} w_k$ (tel que $\forall k \in \mathbb{N}, w_k = \sum_{i+j=k} u_i v_j = \sum_{0 \leq i \leq k} u_i v_{k-i}$) est également **absolument convergente** et de **somme** : $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \sum_{k=0}^{+\infty} v_j$.

Fiche M13 – Algèbre générale (Introduction)

Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Algèbres de Lie** (introduction à la *géométrie différentielle* en *théorie des champs*)
. Un **groupe de Lie**, G , est un **groupe** muni d'une **structure de variété différentielle** pour laquelle sa **loi « . »** et le **passage à l'inverse** sont **différentiables**.
Groupes de Lie classiques : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $GL_n(\mathbb{K})$, $SL_n(\mathbb{K}) = \{x \in GL_n(\mathbb{K}), \det x = 1\}$;
Groupes orthogonaux : $O_n(\mathbb{R}) = \{x \in GL_n(\mathbb{R}), {}^t x x = id\}$, $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$,
 $O(p, q)(\mathbb{R}) = \{x \in GL_{p+q}(\mathbb{R}), {}^t x I_{p,q} x = id\}$, $SO(p, q)(\mathbb{R}) = O(p, q)(\mathbb{R}) \cap SL_{p+q}(\mathbb{R})$;
Groupes unitaires : $U(n, \mathbb{K}) = O_n(\mathbb{K})$, $SU(n, \mathbb{K}) = SO_n(\mathbb{K})$, $U(n, \mathbb{C})$ est égal^t noté $U(n)$.

Fiche M15 – Algèbre linéaire - Matrices

Formules, propriétés

- **Relations déterminant – trace** (\mathbb{K} : sous-corps de \mathbb{C})
Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\det(A) = (1/2) \left((\text{tr}(A))^2 - \text{tr}(A^2) \right)$.
Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, $\det(A) = (1/6) \left((\text{tr}(A))^3 - 3\text{tr}(A^2)\text{tr}(A) + 2\text{tr}(A^3) \right)$, ...
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \\ \sum_{i=1}^n i k_i = n}} \prod_{i=1}^n ((-1)^{1+k_i} / (i^{k_i} k_i!)) \text{tr}(A^i)^{k_i}$.
Formule de Jacobi :
Si $t \mapsto A(t) \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, $\frac{d \det(A(t))}{dt} = \det(A(t)) \cdot \text{tr} \left(A^{-1}(t) \frac{d(A(t))}{dt} \right)$.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\exp A) = \exp(\text{tr}(A))$.

Fiche M16 – Espaces préhilbertiens et euclidiens

Définitions

- **Forme bilinéaire**, $\varphi : E^2 = E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ **linéaire** par rapport aux **deux variables**.
Si de plus, φ est **symétrique** ($\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$),
 φ est alors une **forme bilinéaire symétrique**, notée « **fbs** ».
- **Forme quadratique**, $q : E \rightarrow \mathbb{K}$ si $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$ et $\varphi : (u, v) \mapsto (q(u+v) - q(u) - q(v))/2$: **fbs**.
 φ : **forme polaire** de $q \rightarrow \varphi(u, u) = q(u)$, $u \perp v$ par rapport à q si $\varphi(u, v) = 0$.
Si q est **définie positive** ($\forall u \in E, q(u) \geq 0$ et si $q(u) = 0$ alors $u = 0_E$) (*hors programme*),
la **forme polaire** est un **produit scalaire** de **norme associée** $x \mapsto \sqrt{q(x)}$. (**Pscal**)

- **Espaces préhilbertiens**

- **Espace préhilbertien réel** : E , \mathbb{R} -ev muni d'un **produit scalaire** φ , qui est une **forme bilinéaire symétrique définie positive**.
On note $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : (\mathbf{x}|\mathbf{y})$ et $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{q}(\mathbf{x}) : \|\mathbf{x}\|^2$.

Formules, propriétés

(\mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{C} , E un \mathbb{K} ev de dimension finie, $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$)

- **Théorème spectral (ThSp)**. Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{L}(E)$, **symétrique** et E : espace euclidien. Alors E est **somme directe orthogonale** des **sous-espaces propres** de \mathbf{u} .
Pareillement, il **existe** une **base orthonormale diagonalisant \mathbf{u}** .

Fiche M17 – Polynômes, fractions rationnelles

Définitions

Polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ pour \mathbb{K} : sous-corps de \mathbb{C} , $\sum_{k \geq 0} \mathbf{a}_k X^k$ de **coefficients** $\mathbf{a}_k \in \mathbb{K}$.

Exercices d'application et grands classiques

Énoncés :

- **9. Polynômes complexes et borne de Cauchy** (d'après CAPES)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de **degré** $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X) = \sum_{k=0}^n \mathbf{a}_k X^k$. P est donc **scindé**.
La **borne de Cauchy** de P est ρ , l'**unique** (à montrer) **racine réelle positive** de :
 $|\mathbf{a}_n| X^n = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{a}_k| X^k$. Soient $\zeta_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les **n racines** de P (non nécess' distinctes).
Montrer que $|\zeta| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\zeta_i| \leq \rho$. En déduire $(\sqrt[n]{2} - 1)\rho \leq |\zeta|$.

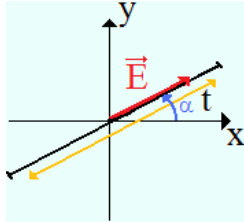
Corrigés (Cf. (Div.e)) ($\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$)

- **9. Polynômes complexes et borne de Cauchy**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(X) = \sum_{k=0}^n \mathbf{a}_k X^k$, où $\mathbf{a}_n \neq 0$ et $\mathbf{a}_k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ non tous nuls.
Soit le polynôme réel Q , $Q(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} (|\mathbf{a}_k|/|\mathbf{a}_n|) X^k$ et la fonction $\mathbf{h} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$,
 $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})/x^n$ sur \mathbb{R}_+^* . $\rightarrow \mathbf{h} \searrow$ (strict.) sur \mathbb{R}_+^* avec **$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = -\infty$** .
...

Fiche P10 – Ondes lumineuses

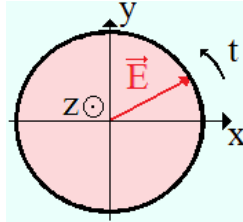
Définitions et variables

- **Polarisations d'ondes planes** (propagation du champ électrique selon l'axe Oz)
($a, b, \omega, k \in \mathbb{R}_+^*$)



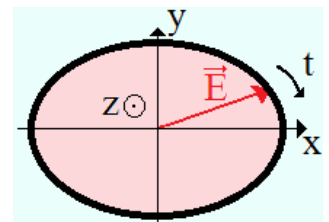
Rectiligne (linéaire)

$$\vec{E} = E_0 \begin{vmatrix} a \cdot \cos(\omega t - kz) \\ b \cdot \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{vmatrix}$$



Circulaire gauche

$$\vec{E} = E_0 \begin{vmatrix} a \cdot \cos(\omega t - kz) \\ a \cdot \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{vmatrix}$$



Elliptique droite

$$\vec{E} = E_0 \begin{vmatrix} a \cdot \cos(\omega t - kz) \\ -b \cdot \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Fiche P11 – Ém dans le vide et milieux conducteurs

Formules, propriétés

- **Relations de géométrie différentielle** ($\forall \vec{X}, \vec{Y}, U$)
 - Pour C entourant (sens + / \vec{S}) S , $\oint_C \vec{X} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{X} \cdot d\vec{S}$: Th. de (Stokes)

- **Onde incidente** sur une **interface** entre deux milieux, 1 et 2 ($\mathbf{I}_{1/2}$) :

$$(MG) \rightarrow \vec{E}_{2,\perp} - \vec{E}_{1,\perp} = (\sigma_1 / \epsilon_0) \vec{n}_{1-2} : (1) \quad (MF) \rightarrow \vec{E}_{2,\parallel} - \vec{E}_{1,\parallel} = \vec{0} : (3)$$

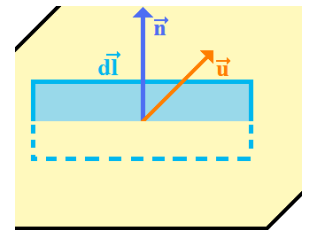
$$(MD) \rightarrow \vec{B}_{2,\perp} - \vec{B}_{1,\perp} = \vec{0} : (2) \quad (MA) \rightarrow \vec{B}_{2,\parallel} - \vec{B}_{1,\parallel} = \mu_0 \vec{J}_{S,1} \times \vec{n}_{1-2} : (4)$$

Dém : C : contour rectangulaire, en bleu, entre les milieux 1, en bas et 2, en haut, de largeur l , de hauteur h , entourant la surface S . Avec (MF),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot d\vec{l} = \lim_{h \rightarrow 0} \iint - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{E}_{2,\parallel} = \vec{E}_{1,\parallel} : (3). \text{ Avec (MA), } \lim_{h \rightarrow 0} \iint \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\rightarrow \vec{B}_{2,\parallel} - \vec{B}_{1,\parallel} = \mu_0 \vec{J}_{S,1} \times \vec{n}_{1-2} : (4)$$



Fiche P21 – Physique du solide

Exercices d'application et grands classiques

Énoncés :

- 2. Réseau carré plan (xOy) de côté a formé d'atomes de masse m

Pour des interactions supposées constantes et limitées aux premiers voisins, les seuls termes de potentiel non nuls étant (à chaque atome correspond deux indices) :

$$\phi^{zz}(\vec{R}_{i,j} - \vec{R}_{i\pm 1,j}) = \phi^{zz}(\vec{R}_{i,j} - \vec{R}_{i,j\pm 1}) = C = \text{cste}, \dots$$

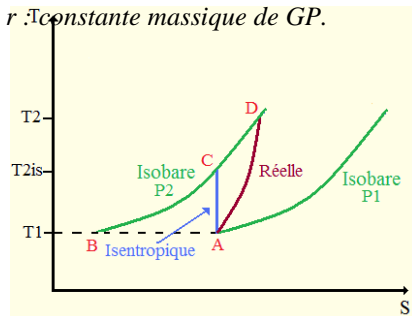
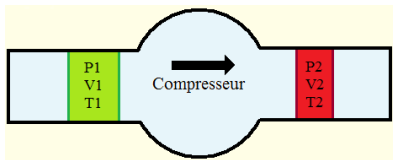
Fiche P22 – Thermodynamique

Exercices d'application et grands classiques

Énoncés :

- 5. Compresseur de GP (d'après ENSI)

Travail fourni par le moteur à l'air (considéré GP) : W' , chaleur échangée avec l'extérieur Q , c_v , c_p : capacités massiques, r : constante massique de GP.



Rendement du travail utile adiabatique – réversible / réel :

$$\eta = W'_{\text{adia-rév}} / W'_{\text{réel}} .$$

On néglige les variations d'énergies potentielle et cinétique macroscopique.

Montrer que :

$$W' = \int_1^2 V dP + \int_1^2 T \delta S_{\text{produite}} .$$

$$\eta = c_p(T_{2\text{-Laplace}} - T_1) / c_p(T_2 - T_1) = ((P_2/P_1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1) T_1 / (T_2 - T_1) .$$

Sur le diagramme (T, S), déterminer $W'_{\text{réel}}$ et $W'_{\text{adia-rév}}$.

Avec un refroidissement intermédiaire isobare réversible :

$$(P_1, T_1) \xrightarrow{\text{Isentropique, } W_1'} (P_1', T_1') \xrightarrow{\text{Isobare, } W_2'} (P_1', T_1) \xrightarrow{\text{Isentropique, } W_3'} (P_2, T_2)$$

En notant $x_1 = P_1' / P_1$, $x_2 = P_2 / P_1'$, déterminer W' dans ce cas et comparer.

Fiche P25 – Introduction à la mécanique quantique

Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Étude** dans un **repère cartésien** (O, x, y, z) du **comportement** d'une **particule libre** dans un **volume cubique** de **côtés** $L_1 = L_2 = L_3 = L$. $V = L^3$.

...

L'évolution des **états stationnaires** ($\psi_{particule}(x, y, z, t_0) = |0\rangle$) est alors (Cf. (U)) :

$$\Psi_{particule}(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{8}{V}} \sum_{n_1, n_2, n_3 \geq 1} \langle 0 | n_1 n_2 n_3 \rangle \sin\left(\frac{\pi n_1 x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n_2 y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n_3 z}{L}\right) \cdot \exp\left(\frac{-i}{\hbar} E_{n_1, n_2, n_3} (t - t_0)\right) |0\rangle.$$

Fiche C8 – Thermochimie

Définitions et variables

- **Point triple** : point (*unique*) du **diagramme de phase température – pression** d'une **substance chimique pure** où **trois phases sont présentes**. La **variance** y est **nulle**.
Le point triple de l'eau servait ainsi de référence pour le kelvin.
Pour les **corps purs**, les **trois phases** sont **solide, liquide** et **gaz**.
Les corps purs solides ayant des formes allotropiques peuvent également former des points triples avec deux ou trois phases solides.

Unités du Système International

(**1** : avant 2018, **2** : révision de 2018)

Unités de base :

. **Seconde (s)** : **1.** durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. **2.** La seconde, unité de temps du SI, est définie en prenant la fréquence de transition hyperfine de l'état fondamental de césium 133 non perturbé, à (la valeur numérique de) $\Delta\nu_{Cs} = 9192631770 \text{ s}^{-1}$ (Hz).

. **Mètre (m)** : **1.** longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide pendant $1/299\,792\,458$ de seconde. **2.** Le mètre, unité de longueur du SI, est défini en prenant la valeur numérique fixée de la vitesse de la lumière dans le vide, c à $299\,792\,458$ exprimée en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, la seconde étant définie ci-dessus.

. **Kilogramme (kg)** : **1.** masse du prototype en platine iridié du Bureau International des Poids et Mesures. **2.** Le kilogramme, unité de masse du SI, est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, h à $6,62607015\cdot 10^{-34}$ exprimée en $\text{J}\cdot\text{s}$, unité égale à $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$, le mètre et la seconde étant définis ci-dessus.

. **Ampère (A)** : **1.** intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et distants de un mètre dans le vide, produit entre eux une force linéique de $2\cdot 10^{-7} \text{ N/m}$ ($2\cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-2}$). **2.** L'ampère (A), unité de courant électrique du SI, est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, e à $1,602176634\cdot 10^{-19}$ exprimée en coulomb C, unité égale à $\text{A}\cdot\text{s}$, la seconde étant définie ci-dessus.

. **Kelvin (K)** : **1.** $1/273,16$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau. **2.** Le kelvin, unité de température thermodynamique du SI, est défini en prenant la valeur numérique fixée de la cste de Boltzmann, k_B à $1,380649\cdot 10^{-23}$ exprimée en $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$, unité égale à $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis ci-dessus.

. **Candela (cd)** : **1.** intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540\cdot 10^{12} \text{ Hz}$ (s^{-1}) et d'intensité énergétique dans cette direction de $1/683 \text{ W}$ ($\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$) par stéradian (sr). **2.** La candela, unité du SI d'intensité lumineuse dans une direction donnée, est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540\cdot 10^{12} \text{ Hz}$, K_{cd} à 683 exprimée en $\text{lm}\cdot\text{W}^{-1}$, unité égale à $\text{cd}\cdot\text{sr}\cdot\text{W}^{-1}$, soit $\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^3\cdot\text{cd}\cdot\text{sr}$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis ci-dessus.

. **Mole (mol)** : **1.** quantité de matière d'un ensemble d'autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 12 grammes de carbone 12. **2.** La mole est l'unité de quantité de matière du SI. Elle contient $6,02214076\cdot 10^{23}$ (nombre d'Avogadro) entités élémentaires. valeur numérique fixée de la constante d'Avogadro, N_A exprimée en mol^{-1} .

MÉMO DES CONCOURS D'ENTRÉE AUX GRANDES ÉCOLES D'INGÉNIEURS

*Fiches de cours, TP et exercices
en mathématiques, physique et chimie*

Édition 2021

Errata et bonus

Filière MPSI / MP :



Filière PCSI / PC :



Filière MPSI, PCSI, PTSI / PSI :



Compléments :



Fiche M2 – Nombres complexes

Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Fonction logarithme complexe $\log z$**

Cp^t

$L(z) = L(x + iy) = \mathbf{\log(x + iy)}$ est une fonction **holomorphe** (dérivable) sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

En intégrant $\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-z)^k$ de la série $\sum (-z)^n$ sur le disque de son rayon de convergence 1, on obtient $\log(1+z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}$ (valable également pour $|z|=1$).
On peut étudier $L(z) = \int_0^1 \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} / f(z, t) dt$, pour $f(z, t) = 1 + z(t-1)$.

Exercices d'application et grands classiques

Énoncés :

- **5.** Résolution de $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = 1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit le polynôme $P_n(X) = (X+1)^{2n} - (X-1)^{2n} \in \mathbb{C}[X]$.
(Cf. fiche M17 – Polynômes)
Exprimer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X)$ en une **somme de monômes**.
Déterminer les **racines** de P_n puis **factoriser** $P_n(X)$.
En déduire $\sum_{p=1, p \neq n}^{2n} \tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$ et $\prod_{q=1, q \neq n}^{2n-1} \tan\left(\frac{q\pi}{2n}\right)$.

Corrigés :

- **5. (1)** $\rightarrow \forall k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, $\frac{1+z}{1-z} = e^{i\frac{2k\pi}{2n}} \rightarrow z \neq 1$ et $1+z = (1-z)e^{i\frac{k\pi}{n}} \rightarrow e^{i\frac{k\pi}{n}} \neq -1, z \neq 1$

et $z = \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1}{e^{i\frac{k\pi}{n}} + 1} \rightarrow$ Divisant numérateur et dénominateur par $e^{i\frac{k\pi}{2n}}$, $z = \frac{e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n}}}{e^{i\frac{k\pi}{2n}} + e^{-i\frac{k\pi}{2n}}}$.

Donc, $z = i \cdot \frac{\sin \frac{k\pi}{2n}}{\cos \frac{k\pi}{2n}} = i \cdot \tan \frac{k\pi}{2n}$, pour $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \setminus \{n\}$ ($e^{i\frac{k\pi}{n}} = -1$ étant exclu.)

On déduit donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2n - 1$ **racines complexes** et **distinctes** du polynôme P_n qui a pour degré $2n - 1$ car le coefficient en $2n$ est nul (en $2n - 1$, le coefficient est $4n$) :

$\{\alpha_p = i \tan(p\pi/2n), p \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \setminus \{n\}\}$ et sa **factorisation** : $P_n(X) = 4n \prod_{p=1, p \neq n}^{2n} (X - \alpha_p)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (1 - (-1)^{2n-k}) X^k = 2 \sum_{k=0, 2n-k \text{ impair}}^{2n-1} \binom{2n}{k} X^k$. Donc, en **identifiant** pour $n \in \mathbb{N}^*$ les **coefficients** des **deux formes** de chaque polynôme P_n ,

En $X^{2n-2} \rightarrow \sum_{p=1, p \neq n}^{2n} \tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right) = 0$. On retrouve la symétrie de \mathcal{C}_{\tan} par rapport à $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

En $X^1 \rightarrow \sum_{p=1, p \neq n}^{2n} \prod_{q=1, q \neq n, q \neq p}^{2n} \tan\left(\frac{q\pi}{2n}\right) = \prod_{q=1, q \neq n}^{2n-1} \tan\left(\frac{q\pi}{2n}\right) = 2 \binom{2n}{1} (-1)^{n-1} / 4n$.

\rightarrow On obtient $\prod_{q=1, q \neq n}^{2n-1} \tan\left(\frac{q\pi}{2n}\right) = (-1)^{n-1}$. Môme remarque et $\tan(\pi/2 - x) = \cotan x$

Fiche M8 – Suites réelles et étude de suites

Exercices d'application et grands classiques

Énoncés ($n \in \mathbb{N}$) :

- 12. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \{\mathbf{u}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}, \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k = \mathbf{1}\}$, $f_n : \mathbf{u} \mapsto \frac{\prod_{i=1}^n \mathbf{u}_i}{\prod_{i=1}^n (1 - \mathbf{u}_i)}$
Exprimer, s'il existe, $s_n = \sup_{\mathbf{u} \in E_n} f_n(\mathbf{u})$.

Corrigés :

- 12. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, s_n est bien **défini** : le dénominateur de f_n et f_n sont strictement positifs, f_n **continue** sur l'ouvert borné E_n et la limite de f_n aux bords de E_n est **nulle** (*finie*). Dans l'expression de f_n , chaque \mathbf{u}_i est **interchangeable** avec $\mathbf{u}_{j \neq i}$, **symétrie** du **problème** pour le **sup** qui est **atteint** dans E_n . Donc, il existe $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^{*n}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = f_n((\mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_n)) > \mathbf{0}$. D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{a}_n = \mathbf{1}/n$, puis $s_n = (n - 1)^{-n}$.

Fiche M12 – Dénombrement, lois discrètes

Travaux pratiques et approche expérimentale

- Nombre de dérangements** (Cf. fiche M10)

...

La **série entière** $S_n : \sum \frac{D_n}{n!} x^n$ est bien **définie** et a un **rayon de convergence** $R_s \geq 1$ car $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq D_k \leq k!$. On note sa **somme** S . (0) $\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n \frac{D_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = 1$, étant le $n^{\text{ème}}$ coefficient du produit de Cauchy de $\sum \frac{D_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n!}$. On déduit pour $|x| < 1$, qu'en passant aux sommes, $S(x)e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1/(1-x)$, puis $S(x) = e^{-x}/(1-x)$. On retrouve (1) et en passant à la limite en $+\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-1} = \frac{D_n}{n!} + R_n$, où $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|n! R_n| \leq \frac{1}{2}$, puis $D_n = E\left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right)$. Et $R_s = e$.

Fiche M14 – Algèbre linéaire – Morphismes

Définitions (Cf. fiche M15)

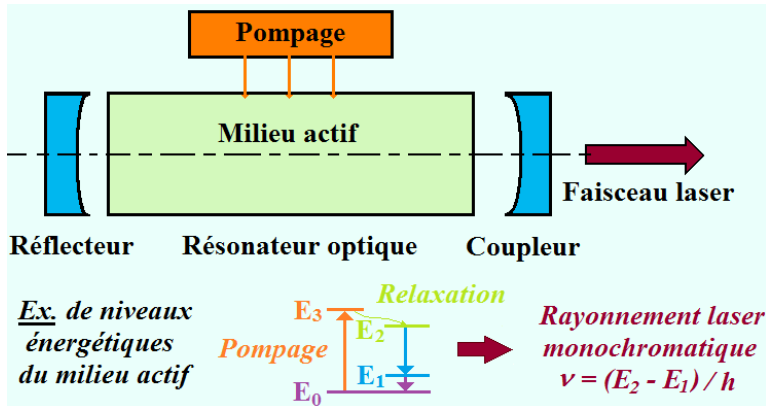
Algèbre linéaire et **multilinéaire** (E, F \mathbb{K} -espaces vectoriels de dim. finies $n, p \in \mathbb{N}^*$)

- E , muni d'un **produit scalaire** $(\cdot | \cdot)$, est un **espace euclidien**. (Cf. fiche M16)
Base orthogonale, $\mathcal{B}_o = (\mathbf{o}_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ base de $E / \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, (\mathbf{o}_i | \mathbf{o}_j) = 0$.
Base orthonormée, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ base de $E / \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \dots$

Fiche P10 – Ondes lumineuses

Définitions et variables

- Laser** : appareil générant une **lumière cohérente** avec **amplification** par **émission stimulée** de **rayonnement**. Le faisceau est donc **monochromatique** (λ).
La transmittance (λ) du coupleur contrairement à celle du réflecteur n'est pas nulle.

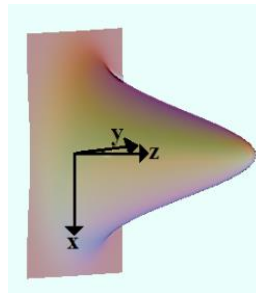


Propagation du faisceau laser en fonction de la distance à l'axe optique ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$):

Largeur du faisceau gaussien (waist) en z :
 $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (\lambda z / \pi w_0^2)^2}$

Intensité moyenne temporelle (en $W \cdot m^{-2}$)

$$I = I_0 (w_0 / w(z))^2 e^{-2r^2 / w^2(z)}$$



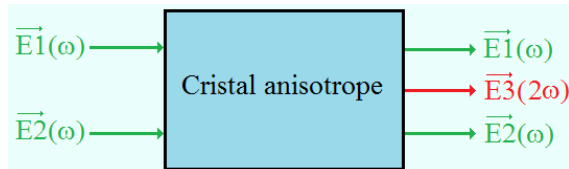
Exercices d'application et grands classiques

- 11. Optique non linéaire** (d'après ENS, cf. fiche P12)

$$\vec{E}_1(\omega) = \underline{E}_1(z) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_1$$

$$\vec{E}_2(\omega) = \underline{E}_2(z) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_2$$

$$\vec{E}_3(2\omega) = \underline{E}_3(z) \cdot e^{j(2\omega t - kz)} \vec{e}_3$$



$$\Delta k = 0 \rightarrow n_3 \cdot 2\omega/c - n_1 \cdot \omega/c - n_2 \cdot \omega/c = 0 \rightarrow 2n_3 = n_1 + n_2$$

En considérant les **indices ordinaires et extraordinaires** (Cf. (Ei)),

$$n^-(\omega) \leq n^+(\omega) < n^+(2\omega) \text{ et } n^-(\omega) < n^-(2\omega) \leq n^+(2\omega)$$

→ **Trois possibilités** ($\leftrightarrow (n_1, n_2, n_3)$) de **rayons sortant du cristal** :

$$(n^+(\omega), n^+(\omega), n^-(2\omega)) \text{ ou } (n^-(\omega), n^+(\omega), n^-(2\omega)) \text{ ou } (n^+(\omega), n^-(\omega), n^-(2\omega))$$

Fiche P23 – Transferts et diffusion

Définitions et variables

- Un **transfert thermique (chaleur)** est un **échange d'énergie** d'un système sur un autre en **énergie interne** de nature **thémique** (*agitat° micro.*) hors équilibre thermo. :
 - Conduction thermique** : **propagation** de l'**agitation thermique** (\rightarrow **énergie cinétique**) d'un corps **chaud** vers un corps **froid** (phénomène **microscopique**).
 - Convection (thermique)** : accompagnant la **conduction** dans un fluide hors d'équilibre, **mouvements** à l'intérieur de celui-ci (phénomène **macroscopique**).
 - Rayonnement** : **absorption / émission** d'**ondes électromagnétiques** (hertziennes, infrarouges, visibles, X, γ , etc.). (Cf. fiche (P11))
- Résistance thermique** (Cf. analogie électrique) : traduit l'opposition thermique d'un corps entre **deux isothermes**, (T_1, T_2) où circule un **flux thermique** Φ :
$$R_{Th} = \frac{T_2 - T_1}{\Phi} \text{ en } K.W^{-1}. \text{ Elle peut être } \textit{conductive, convective ou de rayonnement.}$$
- Flux** : Φ en W, **flux surfacique** en $W.m^{-2}$ de **vecteur courant** de **diffusion** : \vec{j} .

Fiche P25 – Introduction à la mécanique quantique

Travaux pratiques et approche expérimentale

- Intrication quantique** et levée du **paradoxe EPR**. (Cf. fiche P10)

Cp^t

État singulet à partir d'atomes qui se désexcitent en conservant leur moment cinétique total **J**, émettant en **cascade deux photons** simultanément **vers deux côtés op, A et B**. Par **conservation** du **J** de chaque **paire**, les deux **photons (spin S = 1)** sont tels que **$m_S = +1$ ou bien $m_S = -1$** correspondant donc à **deux mêmes types d'ondes des deux côtés opposés : circulaire droit ($|d\rangle$) ou bien circulaire gauche ($|g\rangle$) (équiprobables)**. L'**étude statistique** de la **détection ($|\leftrightarrow\rangle$ ou $|\updownarrow\rangle$)** de chacune des **ondes** en **A** et en **B** après la traversée de **polariseurs rectilignes** d'angles respectifs **a** et **b** selon ces angles, en utilisant les **inégalités de Bell**, **valide** les prévisions théoriques de la **mécanique quantique** en la rendant **incompatible** avec toute **théorie locale** de **variables cachées** : Le système des **paires de photons corrélés** ayant pour **fonction d'onde** Ψ ,

$$\langle\langle\updownarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B||\Psi\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle\langle\updownarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B||d\rangle_A|d\rangle_B + |g\rangle_A|g\rangle_B)$$

$$\rightarrow \langle\langle\updownarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B||\Psi\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle\langle\updownarrow\rangle_A||d\rangle_A\rangle\langle\langle\updownarrow\rangle_B||d\rangle_B\rangle + \langle\langle\updownarrow\rangle_A||g\rangle_A\rangle\langle\langle\updownarrow\rangle_B||g\rangle_B\rangle)$$

La **probabilité** que $|\updownarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B$ se **réalise** est donc $\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i(b-a)}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{i(b-a)}}{\sqrt{2}} \right) \right|^2$

Soit $P_{\updownarrow\updownarrow} = \cos^2(b-a)/2$ et de même, $P_{\updownarrow\leftrightarrow} = P_{\leftrightarrow\updownarrow} = \sin^2(b-a)/2$, $P_{\leftrightarrow\leftrightarrow} = P_{\updownarrow\updownarrow}$.