

MÉMO DES CONCOURS D'ENTRÉE AUX GRANDES ÉCOLES D'INGÉNIEURS

*Fiches de cours, TP et exercices
en mathématiques, physique et chimie*

Édition 2021

Errata et bonus

Filière MPSI / MP :



Filière PCSI / PC :



Filière MPSI, PCSI, PTSI / PSI :



Compléments :



Fiche M2 – Nombres complexes

Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Fonction logarithme complexe $\log z$**

Cp^t

$L(z) = L(x + iy) = \mathbf{\log(x + iy)}$ est une fonction **holomorphe** (dérivable) sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

En intégrant $\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-z)^k$ de la série $\sum (-z)^n$ sur le disque de son rayon de convergence 1, on obtient $\log(1+z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}$ (valable également pour $|z|=1$).

On peut étudier $L(z) = \int_0^1 \partial f(z, t) / \partial z / f(z, t) dt$, pour $f(z, t) = 1 + z(t-1)$.

Exercices d'application et grands classiques

Énoncés :

- **5.** Résolution de $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = 1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.
 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit le polynôme $P_n(X) = (X+1)^{2n} - (X-1)^{2n} \in \mathbb{C}[X]$.
 (Cf. fiche M17 – Polynômes)
 Exprimer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X)$ en une **somme de monômes**.
 Déterminer les **racines** de P_n puis **factoriser** $P_n(X)$.
 En déduire $\sum_{p=1, p \neq n}^{2n} \tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$ et $\prod_{q=1, q \neq n}^{2n-1} \tan\left(\frac{q\pi}{2n}\right)$.

Corrigés :

- **5. (1)** $\rightarrow \forall k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, $\frac{1+z}{1-z} = e^{i\frac{2k\pi}{2n}} \rightarrow z \neq 1$ et $1+z = (1-z)e^{i\frac{k\pi}{n}} \rightarrow e^{i\frac{k\pi}{n}} \neq -1, z \neq 1$

et $z = \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1}{e^{i\frac{k\pi}{n}} + 1} \rightarrow$ Divisant numérateur et dénominateur par $e^{i\frac{k\pi}{2n}}$, $z = \frac{e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n}}}{e^{i\frac{k\pi}{2n}} + e^{-i\frac{k\pi}{2n}}}$.

Donc, $z = i \cdot \sin \frac{k\pi}{2n} / \cos \frac{k\pi}{2n} = i \cdot \tan \frac{k\pi}{2n}$, pour $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \setminus \{n\}$ ($e^{i\frac{k\pi}{n}} = -1$ étant exclu.)

On déduit donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2n - 1$ **racines complexes** et **distinctes** du polynôme P_n qui a pour degré $2n - 1$ car le coefficient en $2n$ est nul (en $2n - 1$, le coefficient est $4n$) :

$\{\alpha_p = i \tan(p\pi/2n), p \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \setminus \{n\}\}$ et sa **factorisation** : $P_n(X) = 4n \prod_{p=1, p \neq n}^{2n} (X - \alpha_p)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (1 - (-1)^{2n-k}) X^k = 2 \sum_{k=0, 2n-k \text{ impair}}^{2n-1} \binom{2n}{k} X^k$. Donc, en **identifiant** pour $n \in \mathbb{N}^*$ les **coefficients** des **deux formes** de chaque polynôme P_n ,

En $X^{2n-2} \rightarrow \sum_{p=1, p \neq n}^{2n} \tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right) = 0$. On retrouve la symétrie de \mathcal{C}_{\tan} par rapport à $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

En $X^1 \rightarrow \sum_{p=1, p \neq n}^{2n} \prod_{q=1, q \neq n, q \neq p}^{2n} \tan\left(\frac{q\pi}{2n}\right) = \prod_{q=1, q \neq n}^{2n-1} \tan\left(\frac{q\pi}{2n}\right) = 2 \binom{2n}{1} (-1)^{n-1} / 4n$.

\rightarrow On obtient $\prod_{q=1, q \neq n}^{2n-1} \tan\left(\frac{q\pi}{2n}\right) = (-1)^{n-1}$. Môme remarque et $\tan(\pi/2 - x) = \cotan x$

Fiche M8 – Suites réelles et étude de suites

Exercices d'application et grands classiques

Énoncés ($n \in \mathbb{N}$) :

- 12. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \{\mathbf{u}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}, \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k = \mathbf{1}\}$, $f_n : \mathbf{u} \mapsto \frac{\prod_{i=1}^n \mathbf{u}_i}{\prod_{i=1}^n (1 - \mathbf{u}_i)}$
Exprimer, s'il existe, $s_n = \sup_{\mathbf{u} \in E_n} f_n(\mathbf{u})$.

Corrigés :

- 12. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, s_n est bien **défini** : le dénominateur de f_n et f_n sont strictement positifs, f_n **continue** sur l'ouvert borné E_n et la limite de f_n aux bords de E_n est **nulle** (*finie*). Dans l'expression de f_n , chaque \mathbf{u}_i est **interchangeable** avec $\mathbf{u}_{j \neq i}$, **symétrie** du **problème** pour le **sup** qui est **atteint** dans E_n . Donc, il existe $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^{*n}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = f_n((\mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_n)) > 0$. D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{a}_n = \mathbf{1}/n$, puis $s_n = (n - 1)^{-n}$.

Fiche M12 – Dénombrement, lois discrètes

Travaux pratiques et approche expérimentale

- Nombre de dérangements** (Cf. fiche M10)

...

La **série entière** $S_n : \sum \frac{D_n}{n!} x^n$ est bien **définie** et a un **rayon de convergence** $R_s \geq 1$ car $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq D_k \leq k!$. On note sa **somme** S . (0) $\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n \frac{D_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = 1$, étant le $n^{\text{ème}}$ coefficient du produit de Cauchy de $\sum \frac{D_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n!}$. On déduit pour $|x| < 1$, qu'en passant aux sommes, $S(x)e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1/(1-x)$, puis $S(x) = e^{-x}/(1-x)$. On retrouve (1) et en passant à la limite en $+\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-1} = \frac{D_n}{n!} + R_n$, où $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|n! R_n| \leq \frac{1}{2}$, puis $D_n = E\left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right)$. Et $R_s = e$.

Fiche M14 – Algèbre linéaire – Morphismes

Définitions (Cf. fiche M15)

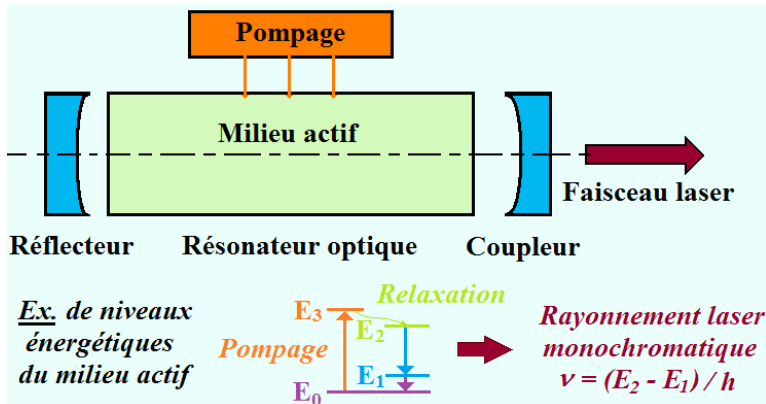
Algèbre linéaire et **multilinéaire** (E, F \mathbb{K} -espaces vectoriels de dim. finies $n, p \in \mathbb{N}^*$)

- E , muni d'un **produit scalaire** $(\cdot | \cdot)$, est un **espace euclidien**. (Cf. fiche M16)
Base orthogonale, $\mathcal{B}_o = (\mathbf{o}_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ base de $E / \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, (\mathbf{o}_i | \mathbf{o}_j) = 0$.
Base orthonormée, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ base de $E / \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \dots$

Fiche P10 – Ondes lumineuses

Définitions et variables

- Laser** : appareil générant une **lumière cohérente** avec **amplification** par **émission stimulée** de **rayonnement**. Le faisceau est donc **monochromatique** (λ).
La transmittance (λ) du coupleur contrairement à celle du réflecteur n'est pas nulle.

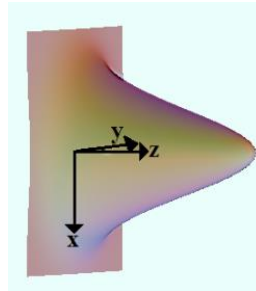


Propagation du faisceau laser en fonction de la distance à l'axe optique ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$):

Largeur du faisceau gaussien (waist) en z :
 $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (\lambda z / \pi w_0^2)^2}$

Intensité moyenne temporelle (en $W \cdot m^{-2}$)

$$I = I_0 (w_0 / w(z))^2 e^{-2r^2 / w^2(z)}$$



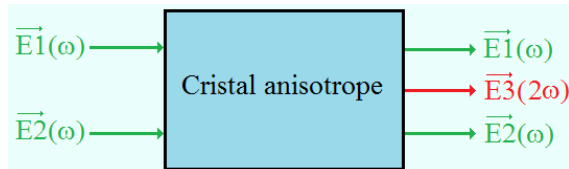
Exercices d'application et grands classiques

- 11. Optique non linéaire** (d'après ENS, cf. fiche P12)

$$\vec{E}_1(\omega) = \underline{E}_1(z) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_1$$

$$\vec{E}_2(\omega) = \underline{E}_2(z) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_2$$

$$\vec{E}_3(2\omega) = \underline{E}_3(z) \cdot e^{j(2\omega t - kz)} \vec{e}_3$$



$$\Delta k = 0 \rightarrow n_3 \cdot 2\omega/c - n_1 \cdot \omega/c - n_2 \cdot \omega/c = 0 \rightarrow 2n_3 = n_1 + n_2$$

En considérant les **indices ordinaires et extraordinaires** (Cf. (Ei)),

$$n^-(\omega) \leq n^+(\omega) < n^+(2\omega) \text{ et } n^-(\omega) < n^-(2\omega) \leq n^+(2\omega)$$

→ **Trois possibilités** ($\leftrightarrow (n_1, n_2, n_3)$) de **rayons sortant du cristal** :

$$(n^+(\omega), n^+(\omega), n^-(2\omega)) \text{ ou } (n^-(\omega), n^+(\omega), n^-(2\omega)) \text{ ou } (n^+(\omega), n^-(\omega), n^-(2\omega))$$

Fiche P23 – Transferts et diffusion

Définitions et variables

- Un **transfert thermique (chaleur)** est un **échange d'énergie** d'un système sur un autre en **énergie interne** de nature **thémique** (*agitat° micro.*) hors équilibre thermo. :
 - Conduction thermique** : **propagation** de l'**agitation thermique** (\rightarrow **énergie cinétique**) d'un corps **chaud** vers un corps **froid** (phénomène **microscopique**).
 - Convection (thermique)** : accompagnant la **conduction** dans un fluide hors d'équilibre, **mouvements** à l'intérieur de celui-ci (phénomène **macroscopique**).
 - Rayonnement** : **absorption / émission** d'**ondes électromagnétiques** (hertziennes, infrarouges, visibles, X, γ , etc.). (Cf. fiche (P11))
- Résistance thermique** (Cf. analogie électrique) : traduit l'opposition thermique d'un corps entre **deux isothermes**, (T_1, T_2) où circule un **flux thermique Φ** :
$$R_{Th} = \frac{T_2 - T_1}{\Phi} \text{ en } K.W^{-1}. \text{ Elle peut être } \textit{conductive, convective ou de rayonnement.}$$
- Flux** : Φ en W, **flux surfacique** en $W.m^{-2}$ de **vecteur courant** de **diffusion** : \vec{j} .

Fiche P25 – Introduction à la mécanique quantique

Travaux pratiques et approche expérimentale

- Intrication quantique** et levée du **paradoxe EPR**. (Cf. fiche P10)

Cp^t

État singulet à partir d'atomes qui se désexcitent en conservant leur moment cinétique total **J**, émettant en **cascade deux photons** simultanément **vers deux côtés op. A et B**. Par **conservation** du **J** de chaque **paire**, les deux **photons (spin S = 1)** sont tels que **$m_S = +1$ ou bien $m_S = -1$** correspondant donc à **deux mêmes types d'ondes des deux côtés opposés : circulaire droit ($|d\rangle$) ou bien circulaire gauche ($|g\rangle$) (équiprobables)**. L'**étude statistique** de la **détection ($|\leftrightarrow\rangle$ ou $|\updownarrow\rangle$)** de chacune des **ondes** en **A** et en **B** après la traversée de **polariseurs rectilignes** d'angles respectifs **a** et **b** selon ces angles, en utilisant les **inégalités de Bell**, **valide** les prévisions théoriques de la **mécanique quantique** en la rendant **incompatible** avec toute **théorie locale** de **variables cachées** : Le système des **paires de photons corrélés** ayant pour **fonction d'onde Ψ** ,

$$\langle\langle\updownarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B||\Psi\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle\langle\updownarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B||d\rangle_A|d\rangle_B + |g\rangle_A|g\rangle_B)$$

$$\rightarrow \langle\langle\updownarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B||\Psi\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle\langle\updownarrow\rangle_A||d\rangle_A\rangle\langle\langle\updownarrow\rangle_B||d\rangle_B\rangle + \langle\langle\updownarrow\rangle_A||g\rangle_A\rangle\langle\langle\updownarrow\rangle_B||g\rangle_B\rangle)$$

La **probabilité** que $|\updownarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B$ se **réalise** est donc $\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i(b-a)}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{i(b-a)}}{\sqrt{2}} \right) \right|^2$

Soit **$P_{\updownarrow\updownarrow} = \cos^2(b-a)/2$** et de même, **$P_{\updownarrow\leftrightarrow} = P_{\leftrightarrow\updownarrow} = \sin^2(b-a)/2$** , **$P_{\leftrightarrow\leftrightarrow} = P_{\updownarrow\updownarrow}$** .