Colles de mathématiques en Bac+1

Aurélien Roudier

Colles de mathématiques en ECE-1 et ECS-1

. *Fonctions*

(1)

Application du cours : Donner des exemples de probabilité conditionnelle et d'espérance.

Exercice : Pour tout réel x où les fonctions suivantes sont définies,

$f(x) = \frac{e^{3x-5}}{2x+3}$, $g(x) = \frac{1}{2x+3}$ et $h(x) = e^{3x-5}$.

1) Sur quel ensemble f est-elle infiniment dérivable ?
2) Déterminer $f'(x)$, puis $f''(x)$.
3) En montrant que f est le produit de g et de h, déduire $f^{(n)}(x)$ d'après une formule à énoncer.
4) En déduire le polynôme P_n tel que $P_n(x) = f^{(n)}(x).(2x+3)^{n+1}.e^{-3x+5}$.

(2)

Application du cours : Énoncer le théorème des accroissements finis puis l'appliquer à la fonction ln pour montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \in \left]\, \frac{1}{n+1} \,;\, \frac{1}{n} \,\right[$.

Exercice : Soit $f : x \mapsto 3x - 7$, $g : x \mapsto -2x + 5$.

1) Déterminer $(\exp(f))^{(k)}$, $(\exp(g))^{(k)}$, puis $(\exp(f+g))^{(n)}$ pour des entiers naturels k et n.
2) Rappeler la formule de Leibniz de la dérivée $n^{\text{ième}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) du produit de deux fonctions.
3) En déduire $(\exp(f) \times \exp(g))^{(n)}$ (vérifier ce résultat avec le 1)), puis $(\ln(f) \times \ln(g))^{(n)}$.

(3)

Application du cours :

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont injective, surjective ou bijective ?

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto |2x + 3| + x$, $f_2 : \mathbb{R} \to [0,1], x \longmapsto \text{Déc}(x)$, $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 4$

Exercice : Soit $f : x \longmapsto \frac{2x}{|x-1|+|x+1|}$ et $g : x \longmapsto \text{signe}(x^2 - 1)$

1. Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$ et représenter graphiquement f(x)
2. Trouver une relation entre f' et g

(4)

Application du cours :

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont injective, surjective ou bijective ?

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto |x + 3| + x + 4$, $f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+, x \longmapsto 2/\sqrt{x}$, $f_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \longmapsto 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4$

Exercice :

1. Soit $f : x \longmapsto x + |x|$. Comparer f' et $g : x \longmapsto 1 + \text{signe}(x)$.
2. Étudier la fonction $x \longmapsto \text{signe}(|x + 1| - |x - 1|) \times (|2x + 1| + x)$. Représentation graphique.

(5)

Application du cours :

Comparer $f(x) = 1/2 \times (1 + \text{signe}(1/2 - \text{Déc}(x/2)))$ et $g(x) = \text{Ent}(2 \times \text{Déc}((x+1)/2))$

Exercice : Soit $f : x \longmapsto \ln(x)$ et $g(x) = \ln(3x + 5) + 2 - \ln(3)$

1. Déterminer et représenter graphiquement signe(g(x)).
2. Déterminer et représenter graphiquement Ent(f) : $x \longmapsto \text{Ent}(f(x))$.
3. Montrer que $g(x) = f(x + a) + b$, où a et b sont des constantes à déterminer.
4. En déduire et représenter graphiquement Ent(g) : $x \longmapsto \text{Ent}(g(x))$.

(6)

Application du cours : Calculer $\int_1^2 \frac{t^3+4t^2+4t+2}{t^2+3t-1}\,dt$

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n(x) = \int_1^x (\ln t)^n\,dt$.

1. Pour quelles valeurs de x, $J_n(x)$ est-elle définie ?
2. Déterminer $J_1(x)$ puis $J_2(x)$ en intégrant par parties.
3. a) Montrer que $J_k(x) = x.(\ln x)^k - k.J_{k-1}(x)$, pour tout k entier supérieur ou égal à 2.
   b) On montre alors que $J_n(x) = (-1)^{n+1}.n! + x.\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(-1)^k (\ln x)^{n-k}$.
   Vérifier cette expression de $J_n(x)$ en la dérivant, ou (puis) en calculant $J_n(x) + nJ_{n-1}(x)$.

(7)

Application du cours : Donner un équivalent de $x^{-3,5}$ en 1. *On pourra poser $x = 1 + \varepsilon$.*

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, fonction paire telle que $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ pour $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $f(x) = a_4.x^4 + a_3.x^3 + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$ pour $x \in [-1 ; 1]$, où a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 sont des réels.

1) Pourquoi a-t-on $a_0 = 1$?
2) Montrer, puisque f est paire, que $a_3 = 0$ et $a_1 = 0$.
3) Quelle condition faut-il sur a_4 et a_2 pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?
4) Quelle condition faut-il sur a_4 et a_2 pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et f ' continue sur $\mathbb{R}$?
5) Déterminer alors a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 et donner deux expressions de f.

(8)

Application du cours : Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\ln(1+x)}-(1+x)^2}{\ln\left(\sqrt{1+x}\right)}$.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = (2X-3)^{n+3} + (4-2X)^{n+2} - 1$ et $Q_n(X) = X^n + 3X + 2$.

1) Quel est le coefficient en X^n de $P_n(X)$?
2) Montrer que $X - 3/2$, $X - 2$ et $X^2 - (7/2)X + 3$ divisent $P_n(X)$.
3) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $Q_n(X)$.
4) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $Q_2(X)$.

(9)

Application du cours :

Trouver une fonction convexe sur $\mathbb{R}_-$, concave sur $[0,1]$ et convexe sur $[1, +\infty[$.

Exercice :

1) Donner un équivalent en 0 de $\sqrt{1+x}$.

2) Montrer qu'un équivalent en 0 de $\sqrt{2+x}$ est $\sqrt{2} \times \left(1 + \frac{x}{4}\right)$.

3) En déduire un équivalent en 0 de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

4) En déduire un équivalent en 0 de $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}$.

(10)

Application du cours :

Déterminer la concavité de la courbe représentant sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto x.\exp\left(\frac{-x^2}{2} + 1\right)$.

Exercice : Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 \times x^{1/x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et donner une expression de f avec une exponentielle.
2. f est-elle prolongeable par continuité ? De même pour f' là où f est dérivable ?
3. Montrer que $2x^4 + 1 - 2\ln x \geq \frac{3}{2} + \ln 2$, en déduire le signe de f' et le tableau de variations de f
4. Déterminer les tangentes en x = ½ et en x = 1.

(11)

Application du cours : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x + \sqrt{|1-3x|}}{\sqrt{|1+3x|} - x}$, $g : x \longmapsto f(x) + f(-x)$ et $h = \ln(f)$.

1. Déterminer les ensembles de définition de f, g et h. Étudier les parités de f, g et h.
2. Déterminer la continuité, la dérivabilité de f. Calculer f 'sur $]-1/3\,;+1/3[$ et en déduire g' et h'
3. En déduire les tangentes à la courbe représentant f en x = 0 et en x = 1/3.

Exercice : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{e^{2x} + 2e^{1-x}}{e^{-2x} + 2e^{1+x}}$, $g : x \longmapsto x \times (f(x) - f(-x))$ et $h = \ln(f)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f . Étudier les parités de f, g et h.
2. Calculer f(0), h(0), puis $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.
3. Déterminer f' puis la tangente à la courbe représentant f en x = 0.
4. Montrer que $X^4 - 2eX^3 + 2eX - 1 = (X^2 - 1)(X^2 - 2eX + 1)$, puis résoudre h(x) = 0.

(12)

Application du cours :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \longmapsto \ln(1+x^2)$ est-elle injective, surjective ou bijective ?

Déterminer sur un intervalle approprié sa fonction réciproque.

Exercice : Soit pour un réel a, $f_a : x \longmapsto \sqrt{x} / \ln(ax)$

1. Étudier f_1. Représentation graphique. En déduire l'étude de f_a.
2. Déterminer le nombre de solutions de $f_a(x) = c$ suivant les réels a et c.

(13)

Application du cours :

1. Définition et exemple de diagramme de Venn. 2. Quel est l'ensemble $\{(x, x), x \in A\}$?

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \{1, 2, ..., n\}$, $f_{n,p}(x) = 1/2 \times (1 + \text{signe}(p/n - \text{Dec}(x/n)))$.
Pour un réel u, Dec(u) est sa partie décimale et signe(u) = – 1 si u < 0, +1 si u > 0 et 0 si u = 0.

Déterminer et représenter graphiquement $f_{1,1}(x)$, $f_{2,1}(x)$, $f_{3,1}(x)$, $f_{5,3}(x)$, $f_{n,n}(x)$, $f_{n,p}(x) - f_{n,p-1}(x)$.

(14)

Application du cours :

Parmi les deux fonctions suivantes, lesquelles sont injective, surjective ou bijective ?
$f_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x + 1 - \sqrt{3x}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \longmapsto \text{Ent}(x)$, *avec Ent(x) : partie entière du réel x.*

Exercice : Soit la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + |x^2 - x - 1|)$.

1. Étudier f. Représentation graphique.
2. Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = a$ suivant $a \in \mathbb{R}$. Résoudre $f(x) = 1$.

(15)

Application du cours : Soit $f : x \mapsto 2 + \sqrt{3 + x}$. Déterminer f', $(f \circ f)'$, puis f^{-1} et $(f^{-1})'$ en précisant à chaque fois l'ensemble de définition de ces fonctions.

Exercice : Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

1. Donner une expression de f_0, f_1, f_2 et f_3.
2. Montrer que, pour $p \in \{0, 1, ..., n\}$, $f_n^{(p)}(x) = f_{n-p}(x)$ et déterminer $f_n'(x) - f_n(x)$.
3. Que vaut exp', e^0 et $f_n(0)$? En déduire que pour tout réel x fixé, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^x$.
4. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!}$
5. Écrire alors un programme en Pascal permettant de vérifier avec une précision d'au moins 10^{-5} que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est bien e.

(16)

Application du cours :

Calculer en intégrant par parties $\int_1^3 \ln(1 + 2x)\, dx$, puis $\int_1^3 (2x - 3)\, e^{x-1} dx$.

Exercice : Soit $I(c) = \int_0^c \frac{dt}{1 - t + \sqrt{1+t}}$

1) Pour quelles valeurs de c, I (c) est-elle définie ?
2) Calculer I(c) avec le changement de variable $t \to u = \sqrt{1 + t}$
et en identifiant a et b telles que : $\frac{3u}{(2-u)(1+u)} = \frac{a}{2-u} + \frac{b}{1+u}$

. *Suites et séries*

(17)

Application du cours : Avec un DL_1, déterminer un équivalent en 3 de $\exp(\sqrt{1+2x})$.

Exercice : *On veut calculer* $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+...}}}$. Étude de $(U_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $U_{n+1} = \frac{1}{2+U_n}$, $\forall$ n ϵ $\mathbb{N}$ et $U_0 = 1$

1) Déterminer sa limite possible ℓ et on montrera que $|U_{n+1} - \ell| = \left|\frac{1}{2+U_n} - \frac{1}{\ell+2}\right| \leq \frac{1}{2\ell+4}|U_n - \ell|$.

2) En déduire que $|U_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2\ell+4}\right)^n |U_0 - \ell|$.

3) Écrire alors un programme en Python permettant de déterminer ℓ à 10^{-4} près.

(18)

Application de cours : Quel est le coefficient en $a^4.b^5.c^6$ de $(2a - b + c)^{15}$?

Exercice : Étude de $(U_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $U_{n+1} = \frac{U_n{}^2+3U_n-1}{U_n{}^2+2U_n}$, $\forall$ n ϵ $\mathbb{N}$ et $U_0 = 2$.

1) Si $(U_n)_{\mathbb{N}}$ converge, quelle est sa (ses) limite (s) ? *On montrera qu'une limite possible est 1.*

2) Montrer que $U_n \geq 1$, $\forall$ n ϵ $\mathbb{N}$.

3) Étudier la monotonie de $(U_n)_{\mathbb{N}}$. En déduire la convergence de $(U_n)_{\mathbb{N}}$.

4) Montrer que $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{3} \times |U_n - 1|$. En déduire $\lim_{n\to\infty} U_n$.

5) Étudier $(U_n)_{\mathbb{N}}$ pour $U_0 = 0{,}2$. *Donnée :* $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

(19)

Applications du cours :

1) Déterminer n ϵ $\mathbb{N}$ / $\sum_{i=1}^{n} (2i+3) = 15872$. Donnée : $\sqrt{63504} = 252$.

2) Calculer $\sum_{i=2}^{30} \ln(\frac{2i^2}{i^2-2i+1})$, $\ln(\prod_{k=1}^{30} e^{3k-2})$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2\sqrt{i})}{\ln(n!)}$, pour n ϵ $\mathbb{N}\backslash\{0 ; 1\}$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall$ n ϵ $\mathbb{N}$,

$(1 + u_{n+2})(2 + u_n)(2 + u_{n+1}) = (1 + u_{n+1})(2 + u_n)(2 + u_{n+2}) + 2(1 + u_n)(2 + u_{n+1})(2 + u_{n+2})$, $v_n = \frac{1+u_n}{2+u_n}$

1. Montrer que $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$, $\forall$ n ϵ $\mathbb{N}$.
2. En déduire v_n puis u_n en fonction de n. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
3. Exprimer u_n en fonction de n pour $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

(20)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = u_3 = 2$, $u_1 = u_2 = 1$, $\prod_{k=0}^{4} u_{n+k}^{(k-0,5)(k-1)(k-3)} = 1$ et $v_n = \ln u_n$. Exprimer une relation de récurrence de $(v_n)_{\mathbb{N}}$. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(w_n)_{\mathbb{N}}$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$ avec $u_0 = u_1 = 1$
et $w_n = \alpha(-1)^n$ vérifiant $w_{n+2} = 2w_{n+1} + 2w_n + (-1)^n$.

1. Déterminer α, puis la relation de récurrence que vérifie $u_n - w_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4^n/2 + 1$.

(21)

Application du cours :

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n^2 + 2$, $v_n = a \times n^2 + b \times n + c$,

. Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + n^2 + 2$.

. Montrer que la suite de terme g^al $u_n - v_n$ est géométrique. Déduire une expression de u_n en f° de n.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $v_0 = u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$,

$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour $n \to +\infty$.

(22)

Application de cours : Soit $(U_n)_{\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{\mathbb{N}}$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+3} = 3U_{n+1} - 2U_n$, $V_n = U_{n+1} - U_n$ et avec $U_0 = 5$, $U_1 = 2$, $U_2 = -1$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+2} + V_{n+1} = 2V_n$. En déduire que $(V_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite constante.

Déterminer alors $(U_n)_{\mathbb{N}}$ et calculer $\sum_{n=0}^{N} U_n$ pour $N \in \mathbb{N}$.

Exercice : Étude de $(U_n)_{\mathbb{N}}$ la suite telle que $U_{n+1} = \frac{3U_n+48}{31-4U_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $U_0 = \frac{15}{4}$

1) Déterminer les limites possibles. Montrer que $3 \leq U_n \leq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$, que $(U_n)_{\mathbb{N}}$ ↘ et converge.
2) Montrer que $(V_n)_{\mathbb{N}}$ la suite telle que $V_n = \frac{U_n-3}{U_n-4}$ pour $n \in \mathbb{N}$, est géométrique.
3) En déduire un expression de V_n, puis de U_n, en fonction de n.

(23)

Application du cours : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{n}{1}\times\binom{n}{2}\times\binom{n}{3}}{(\sum_{k=1}^{n} k)\times(\sum_{k=1}^{n} k^3)}$

Exercice : Soit $(U_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{{U_n}^2+2U_n+1}{{U_n}^2+U_n}$.

1. Si $(U_n)_{\mathbb{N}}$ converge, montrer que ses limites sont $\ell = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$. Étudier la monotonie et déduire la convergence de $(U_n)_{\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $|U_{n+1} - L| \leq |\ell| \times |U_n - L|$. En déduire $\lim_{n\to\infty} U_n$.

(24)

Application du cours : Exprimer u_n en fonction de n pour $u_0 = u_3 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} + 4u_{n+2} + 4u_n = 0$.

Exercice : Soit $b > c > 0$, $f : x \longmapsto (x + b + c)^3 - 27bcx$ et $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$, $(w_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 > v_0 > w_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3}$, $v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n}$, $\frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\right)$.

1. Montrer que $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis que $u_n > v_n > w_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire les sens de variations de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et de $(w_n)_{\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - w_{n+1} \leq (2/3)(u_n - w_n)$, puis la convergence de $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$, $(w_n)_{\mathbb{N}}$.

(25)

Application du cours : En déterminant $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n$, étudier la série de terme général $u_n = n^2(\ln n)^n/n!$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k}{2^n}$

1. Montrer que si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers 0, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge également vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie $\ell \neq 0$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

(26)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$, $(w_n)_{\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n)$, $u_0 = 3$, $v_0 = 4$, $w_n = v_n - u_n$ et $z_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

1. Montrer que $(w_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et que $(z_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. En déduire u_n et v_n en fonction de n, $\forall n \in \mathbb{N}$, puis $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\sum_{n=2}^{30} u_n$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$

1. Exprimer v_n en fonction de n pour $u_k = 1 / k^2$, $1 / k$ et 1.
2. Pour $\ell = 0$, montrer que $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge également vers 0. La réciproque est-elle vraie ?
3. Pour $\ell \neq 0$, déduire que $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

(27)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

Déterminer l'équation caractéristique et en déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$, $(w_n)_{\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = (u_n + v_n)/2$, $v_{n+1} = (u_{n+1} + v_n)/2$, $u_0 = 3$, $v_0 = 4$, $w_n = v_n - u_n$ et $z_n = (u_n + 2v_n)/3$.

1. Montrer que $(w_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et que $(z_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. En déduire u_n et v_n en fonction de n, $\forall n \in \mathbb{N}$, puis $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\sum_{n=2}^{30} u_n$.

(28)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k.\ln(1+1/k) - \ln(k)}{k(k+1)}$.

Montrer que $u_n = \ln(n+1)/(n+1)$ puis déterminer le sens de variations de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice : Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \binom{n+3}{n}^{-1}$, $b_n = (n+3)a_n$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

1. Montrer que $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ sont décroissantes et convergent vers 0.
2. Montrer $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ que $(n+4)a_{n+1} = (n+1)a_n$, puis que $(n+2)a_{n+1} = (n+5)a_{n+2}$
3. En déduire par récurrence que $S_n = (1 - b_{n+1})/2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, puis $\lim_{n\to+\infty} S_n$

(29)

Application du cours : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} (1 + \ln(n+1) - \ln(n))^n$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{5u_n + 2}{u_n + 1}}$.

1. Calculer les limites éventuelles de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ en montrant que l'une d'elles est 2.
2. Montrer que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bien définie et est majorée par 2.
3. Étudier le sens de variations de $(u_n)_{\mathbb{N}}$. Conclure.
4. Étudier $(u_n)_{\mathbb{N}}$ pour $u_0 = 5$.

(30)

Application du cours : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{e^n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{n}{3}}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$

Exercice : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k}$

1. Montrer que a_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer ${a_{n+1}}^2 - {a_n}^2$ en fonction de a_n puis donner l'éventuel sens de variations de $(a_n)_{\mathbb{N}}$
3. $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$.
4. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $a_{n+1}/a_n - 1 = 1/(a_n + a_{n+1})$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} - a_n$

(31)

Application du cours : Déterminer N en fonction d'un réel donné q vérifiant $\sum_{n=3}^{N-2} q^n = 1000$.

Exercice : Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}}$ avec $a_0 = 3$, $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{(a_n+2b_n)^5}$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{(a_n+2b_n)^5}$

On définit $(c_n)_{\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \ln(a_n + 2b_n)$ et $d_n = a_n/b_n$.

1. Montrer que $(d_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite constante. En déduire une relation entre a_n et b_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $(c_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En déduire c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Déduire du 1. et du 2. les expressions de a_n et de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

(32)

Application du cours : Soit $(U_n)_{\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{n}{n+2}$, $V_n = \ln\left(e + \frac{2}{n(n+1)}\right)$
Montrer que ces deux suites sont adjacentes (l'une croissante, l'autre décroissante et convergeant vers la même limite.).

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$, $(w_n)_{\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{\mathbb{N}}$/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{7}\,(3u_n + 4v_n)$, $v_{n+1} = \frac{1}{7}\,(4u_n + 3v_n)$, $u_0 = 1$, $v_0 = 3$, $w_n = u_n - v_n$ et $z_n = u_n + v_n$.

1. Montrer que $(w_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et que $(z_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. En déduire u_n et v_n en fonction de n, $\forall n \in \mathbb{N}$, puis $\lim_{n\to+\infty} u_n$, $\sum_{n=2}^{N} u_n$ et $\sum_{N=2}^{M}\sum_{n=2}^{N} u_n$.

(33)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} 3^k$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} 3^k$.
Exprimer $\ln(u_n)$ puis $\frac{u_n}{v_n}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice : Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$a_{n+1} = \frac{a_n{}^3}{a_n{}^2 + a_n b_n + b_n{}^2}$, $b_{n+1} = \frac{b_n{}^3}{a_n{}^2 + a_n b_n + b_n{}^2}$
On définit $(c_n)_{\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_n - b_n$ et $d_n = \ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

1. Déterminer $(c_n)_{\mathbb{N}}$. En déduire une relation entre a_n et b_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer $(d_n)_{\mathbb{N}}$. En déduire d_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Déduire du 1. et du 2. les expressions de a_n et de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$,
puis $\lim_{n\to+\infty} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} b_n$.
4. Dans le cas où $a_0 = b_0 = 2$, exprimer a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$,
puis $\lim_{n\to+\infty} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} b_n$

(34)

Applications du cours : Déterminer U_n pour $(U_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $U_0 = 3$, $U_1 = 2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$.
Calculer $\sum_{n=0}^{N} U_n$ en fonction de $N \in \mathbb{N}$.

Exercice : Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = 3$, $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{(a_n - b_n)^4}$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{(a_n - b_n)^4}$
On définit $(c_n)_{\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \ln(a_n - b_n)$ et $d_n = \frac{a_n}{b_n}$

1. Déterminer $(d_n)_{\mathbb{N}}$. En déduire ($\forall n \in \mathbb{N}$) une relation entre a_n et b_n.
2. Montrer que $(c_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En déduire c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Déduire du 1. et du 2. les expressions de a_n et de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$,
puis $\lim_{n\to+\infty} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} b_n$.
4. Dans le cas où $a_0 = 3$, $b_0 = 2$, exprimer a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$,
puis $\lim_{n\to+\infty} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

(35)

Application du cours : Soit $(U_n)_{\mathbb{N}}$, $(V_n)_{\mathbb{N}}$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 3U_n - 8$, $V_n = U_n - 4$ et $U_0 = 1$.
Exprimer U_n en fonction de n puis calculer $\sum_{n=2}^{N} U_n$ pour $N \geq 2$.

Exercice : Soit $q \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{{a_{n+1}}^8}{{a_n}^{16}}$, $b_n = \ln a_n$.

1. Trouver une relation entre b_n, b_{n+1} et b_{n+2}, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une expression de b_n puis de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Exprimer $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ puis $f'(x)$ sous deux formes. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k \times q^k$ en fonction de q, n
4. Calculer $\sum_{n=0}^{N} b_n$ en fonction de $N \in \mathbb{N}$.

(36)

Application du cours : Exprimer $\sum_{k=1}^{n} \frac{-8k^3-20k^2+2k+7}{1-4k^2}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} = \frac{n+1}{n+3} u_n$, $v_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} v_n$, $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

1. Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis identifier à $\frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+3} + \frac{c}{n+4}$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de S_n, puis montrer ou admettre que $S_n \sim \ln n + \gamma$ et calculer, si elle existe, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.
3. Exprimer v_n en fonction de n puis montrer que :
$2\times\sum_{k=1}^{n+1} kv_k + 5\times\sum_{k=1}^{n+1} v_k = 2\times\sum_{k=0}^{n} kv_k + 2\times\sum_{k=0}^{n} v_k$.

(37)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq v_n$, puis en déduire le sens de variations de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq (u_n - v_n)/2$. Exprimer alors $u_n \times v_n$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, telle que $u_0 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = (x + \ln x)e^{x-1}$.

1. Si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge, quelle équation résoud sa(ses) limite(s) ℓ.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$. En déduire la monotonie de $(u_n)_{\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $u_n \geq e^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

(38)

Application du cours :

Etudier suivant $\alpha \in \mathbb{R}_+$ la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\left[(n+1)^{1+1/n} - (n-1)^{1-1/n}\right]$.

Exercice : Soit $(u_n)_\mathbb{N}$, $(U_n)_\mathbb{N}$ et $(V_n)_\mathbb{N}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Exprimer u_n en fonction de n, puis U_n en trois sommes.
2. Exprimer U_n en fonction de n, V_n et V_{2n+1}.
3. En montrant ou en admettant que $V_n \sim \ln n$, calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

(39)

Application du cours : Soit $(U_n)_\mathbb{N}$ et $(V_n)_\mathbb{N}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $V_n = U_n + \frac{1}{n}$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Exprimer ces deux suites en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice : Soit $(u_n)_\mathbb{N}$ et $(\varepsilon_n)_\mathbb{N}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \times u_{n+1} = n$ et $1+ \varepsilon_n = u_{n+1} / u_n$.

1. Trouver une relation entre u_n et ε_n puis une relation de récurrence de $(\varepsilon_n)_\mathbb{N}$.
2. Exprimer ε_n en fonction de n (pair ou bien impair).
3. Déterminer un équivalent aux termes de la série correspondant à $\ln(1 + \varepsilon_n)$.
4. En déduire la convergence de $\frac{1+\varepsilon_n}{1+\varepsilon_1}$ vers $\ell \in\,]0, 1[$. Déterminer ε_1 tel que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

(40)

Application du cours : Soit $(u_n)_\mathbb{N}$ et $(\varepsilon_n)_\mathbb{N}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \times u_{n+1} = n$ et $1+ \varepsilon_n = u_{n+1} / u_n$

Trouver une relation de récurrence de $(\varepsilon_n)_\mathbb{N}$ et exprimer ε_n en fonction de n (pair ou bien impair).

Exercice :

Soit $(u_n)_\mathbb{N}$ telle que $u_0 = -1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + 2e^x$.

1. Montrer qu'il n'existe qu'une racine ℓ de f, unique limite possible de $(u_n)_\mathbb{N}$, avec $\ell \in [-2, -1]$.
2. Montrer que $\forall x \geq 0, -1 \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \ell$. Conclure. Représentation graphique.

(41)

Application du cours :

Déterminer un équivalent et la limite de $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, $\sqrt{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}$.

Exercice :

Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \exp\big(1 + n(x^2 - x)\big)$ et $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$, suite de terme g^{al} la sol° de $(e_n) : f_n(x) = 3$

1. Etudier $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n en précisant les coordonnées et limites pour $n \to +\infty$ de leur extrémum.
2. Calculer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0)$ et $f_n(1)$, puis montrer que $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ est minorée par 1 et décroissante.
3. Montrer que $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(42)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k.\ln(1+1/k) - \ln(k)}{k(k+1)}$

Montrer que $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ puis déterminer le sens de variations de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice : Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$a_n = \binom{n+3}{n}^{-1}$, $b_n = (n+3)a_n$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

1. Montrer que $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ sont décroissantes et convergent vers 0.
2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$ que $(n+4)a_{n+1} = (n+1)a_n$, puis que $(n+2)a_{n+1} = (n+5)a_{n+2}$.
3. En déduire par récurrence que $S_n = (1 - b_{n+1})/2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, puis $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

(43)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(R_n)_{\mathbb{N}}$, $(S_n)_{\mathbb{N}}$ telles que :

$(S_n)_{\mathbb{N}}$ converge et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $u_n \sim R_n^2$.

Déterminer un équivalent (en $+\infty$) de $1/R_n - 1/R_{n-1}$ en fonction de u_n et R_n.

En déduire un équivalent de $1/R_n$ puis u_n en fonction de n.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \times u_{n+1} = n$ et $1 + \varepsilon_n = u_{n+1} / u_n$

1. Trouver une relation entre u_n et ε_n puis une relation de récurrence de $(\varepsilon_n)_{\mathbb{N}}$.
2. Exprimer ε_n en fonction de n (pair ou bien impair).
3. Déterminer un équivalent aux termes de la série correspondant à $\ln(1+\varepsilon_n)$.
4. En déduire la convergence de $\frac{1+\varepsilon_n}{1+\varepsilon_1}$ vers $\ell \in \,]0, 1[$. Déterminer ε_1 tel que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

(44)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4}$, $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

Montrer que $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est arithmétique, puis exprimer u_n en fonction de n

Exercice : Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \longmapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n - ½$ et $(u_n)_{\mathbb{N}}$ telle que u_n est l'unique racine positive de f_n.

1. Montrer que u_n est bien définie et unique.
2. Étudier f_n, puis montrer que $1 \leq u_n \leq 1 + 2/n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la convergence de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(45)

Application du cours : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{3}\right)^n$.

Exercice : Soit $f_n : x \longmapsto x^{n+1} - x$ et $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$, suite de terme général la solution positive de (E_n) : $f_n(x) = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

1. Etudier f_n sur $\mathbb{R}_+$ en précisant les coordonnées de son extrémum et leurs limites pour $n \to +\infty$
2. Montrer que $f_n(0) = f_n(1) = 0$, puis que $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ est minorée par 1 et décroissante.
3. Montrer que $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

. *Polynômes*

(46)

<u>*Application du cours*</u> : Déduire de la formule de Newton une expression de $(a + b)^3$ et $(a - b)^3$.
Soit $A_n = \sum_{k=1}^{n}(k^3 + 3k)$, $B_n = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 1)$. Que valent $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$?
En déduire A_n et B_n. Vérifier ce résultat en calculant directement A_n et B_n.

<u>*Exercice*</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $P_n(X) = \left(\frac{5-X}{2}\right)^n + \left(\frac{X-1}{2}\right)^n - 2^n$.

1) Si $n > 3$, quel est le coefficient en X^3 de $P_n(X)$?

2) Montrer que $X - 1$, $X - 5$ et $X^2 - 6X + 5$ divisent $P_n(X)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, le reste de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $P_2(X)$.

4) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $P_{n-2}(X)$.

(47)

<u>*Application du cours*</u> : Résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x \times (2y - 3) = -1 \end{cases}$

<u>*Exercice*</u> : Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, vérifiant $-3P(X) + 2P'(X) + P''(X) = X^n + \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Que valent a_n, a_{n-1} et a_{n-2} ?

2) Donner une relation de récurrence de la suite des coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}, k\leq n}$.

3) Montrer par une récurrence sur k que $a_{n-k} = \left(-\frac{1}{3}\right)^k \times \frac{n!}{(n-k)!}$.

4) Que vaut α ? Donner une expression de $P(X)$.

(48)

<u>*Application du cours*</u> : Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n_3=1}^{n}\sum_{n_2=1}^{n_3}\sum_{n_1=1}^{n_2} n_1$.

<u>*Exercice*</u> : Soit un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ scindé, c'est à dire que $P(X) = k.\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)^{m_i}$,
où $k \in \mathbb{R}^*$, les a_i, racines de P, sont des réels distincts, et les m_i des entiers supérieurs ou égaux à 1.

1) Déterminer une expression de $P'(X)$. *Rappel : (fg)' = f'g + fg', (fgh)' = f'gh + fg'h + fgh', ...*

2) En déduire que $Q(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i)^{m_i-1}$ divise $P'(X)$.
C'est à dire que le reste de la division euclidienne de P' par Q est le polynôme nul.

3) Pour quelles valeurs de m_i, a_i est-elle également une racine de P' ?

4) Représenter graphiquement des exemples de ces polynômes P(X) et déduire le nombre des autres racines de P' que celles trouvées au 3).

5) En déduire que P' est également scindé. *Rappel : deg (P') = deg (P) – 1.*

(49)

Application du cours : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) = \prod_{p=1}^{n}(X - p)$

En écrivant pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, calculer a_n, a_0, a_{n-1}, a_{n-2} en fonction de n et trouver un équivalent de a_1 en $+\infty$.

Exercice : Soit un entier n, $P_n \in \mathbb{C}[X]$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+X)^k}{2^k}$

1. Calculer $P_n(-1)$, $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(3)$.
2. Montrer que $1 - X = 2\left(1 - \frac{(1+X)}{2}\right)$, puis exprimer $P_n(X)(1 - X)$.
3. En déduire les racines de P_n puis factoriser $P_n(X)$.
4. En déduire $\prod_{k=1}^{n}\left(2 \exp i\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) - 1\right)$.

(50)

Applications du cours : Enoncer la formule de Taylor pour un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$

En déduire que $P^{(j)}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+j)}(0)}{k!}$ puis $P(X+1) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+j)}(0)}{j!\,k!} X^j = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$

Exercice : Soit A et B $\in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^3 + 1)A(X) + (X^2 + X + 1)B(X) = 1$

1. Montrer que $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$.
En déduire deux solutions de (E) : $A_0(X) = \frac{1}{2}$ et $B_0(X) = \frac{1}{2}(1 - X)$
2. Montrer que le reste de la division euclidienne de A(X) par $X^2 + X + 1$ est $A_0(X)$ avec un quotient P(X).
3. Montrer que le reste de la division euclidienne de B(X) par $-(X^3 + 1)$ est $B_0(X)$ avec le même quotient.
4. Conclure.

(51)

Application du cours : Soit $(P_n(X))_{\mathbb{N}}$, une suite de polynômes telle que :

$P_{n+2}(X) - (X+1)P_{n+1}(X) - X^2P_n(X) = 0$ et $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = \frac{X+1}{2}$

1. Déterminer pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x_0)$.
En déduire $P_n(X)$ en l'exprimant en une somme de monômes.
2. Exprimer $P_n(1)$ en fonction de n, puis $\sum_{n=2}^{N+2} P_n(1)$ en fonction de $N \in \mathbb{N}$.

Exercice : Soit un entier $n \geq 2$, $P_n(X) = (X + 1)^n - (X - 1)^n \in \mathbb{C}[X]$

1. Exprimer $P_n(X)$ en une somme de monômes.
2. Déterminer les racines de P_n puis factoriser $P_n(X)$.
3. En déduire $\sum_{k=1}^{n-1} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\prod_{k=1}^{n-1} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

(52)

Application du cours : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) = \prod_{p=1}^{n}(X - p)$.

En écrivant $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, calculer a_n, a_0, a_{n-1}, a_{n-2} en fonction de n et trouver un équivalent de a_1 pour $n \to +\infty$.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = (2X - 3)^{n+3} + (4 - 2X)^{n+2} - 1$ et $Q_n(X) = X^n + 3X + 2$.

1. Quel est le coefficient en X^n de $P_n(X)$?
2. Montrer que $X - 3/2$, $X - 2$ et $X^2 - (7/2)X + 3$ divisent $P_n(X)$.
3. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $Q_n(X)$.
4. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $Q_2(X)$.

(53)

Application du cours : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.

1. Montrer que les racines de P sont de module 1.
2. En déduire que si a est racine de P, alors $|a| = |a + 1| = 1$.
3. En déduire que les racines de P sont $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{4i\frac{\pi}{3}}$ et de même multiplicité.
4. Exprimer P(X).

Exercice : Soit un entier $n \geq 2$, $P_n(X) = (X + 1)^n - (X - 1)^n \in \mathbb{C}[X]$

1. Exprimer $P_n(X)$ en une somme de monômes.
2. Déterminer les racines de P_n puis factoriser $P_n(X)$.
3. En déduire $\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ *(cotan : $x \mapsto \cos(x) / \sin(x)$).*

(54)

Applications du cours : Enoncer la formule de Taylor pour un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$.

En déduire que $P^{(j)}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+j)}(0)}{k!}$ puis $P(X+1) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+j)}(0)}{j!\,k!} X^j = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$

Exercice : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$.

1. Montrer que X divise P(X)
2. En déduire que X + 1, X + 2 et X + 3 divisent également P(X)
3. En écrivant $P(X) = X(X + 1)(X + 2)(X + 3)Q(X)$, montrer que Q est un polynôme constant.
4. Conclure.

(55)

Application du cours : Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(1 + 2 \times (3x - 5)^2)^2 = 29 - 30x + 9x^2$.

Exercice :

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) = n \in \mathbb{N}^*$ et $P(k) = (-1)^{n-k} \times k! \times (n-k)!$, $\forall k \in \{0, 1, ... , n\}$.

1. Montrer que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (X - j)$.
2. Déterminer P(n+1). Exprimer P'(X) puis P''(X).

. *Matrices*

(56)

<u>*Application du cours*</u> : Trouver un polynôme annulateur de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, puis l'inversibilité et A^{-1}.

<u>*Exercice*</u> : Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A = I_3 - B$ et déterminer deux réels, a et b, tels que $B = aC + bC^2$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^{n} AB^k$, $\sum_{k=0}^{n} B^kA$ en fonction de I_3 et B^{n+1}. Calculer C^n, puis B^{n+1}.
3) En déduire que A est inversible en déterminant A^{-1}.
4) Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(57)

<u>*Application du cours*</u> : Soit $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 1/3 & 0 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$, calculer A^2, puis en déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A^n.

<u>*Exercice*</u> : Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

1) Montrer que P_1 est inversible et que $P_1 = P_2^{-1}$.
2) Montrer que $P_1AP_2 = J$, avec la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^3 = 0_3$.
3) En déduire J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis A^k et $\exp(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$
4) Si A est inversible, déterminer A^{-1}.

(58)

<u>*Application du cours*</u> : Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$, trouver un polynôme annulateur puis A^{-1} et A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>*Exercice*</u> : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 36 \\ 1/6 & 0 & 5 \\ 1/36 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A^2 - A - 2I_3 = 0$.
2) En déduire A^{-1}, puis A^n en utilisant la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$.

(59)

<u>*Application du cours*</u> : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, déterminer un polynôme annulateur de A, puis A^{-1}.

<u>*Exercice*</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est unipotente, c'est à dire : $\exists\, N \in \mathbb{N}^* \,/\, (A - I_n)^N = 0_n$

1) Montrer que A est inversible.
2) Montrer pour tout $p \in \mathbb{N}$ que $A^2, A^3, ..., A^p$, puis que A^{-1}, sont également unipotentes.

. *Ensembles, probabilités*

(60)

<u>*Application du cours*</u> : *Une entreprise vend à un grossiste ses produits 1 et 2 aux prix unitaires $p_1 = 4$ € et $p_2 = 6$ €. Le coût de fabrication de x produits 1 suit la loi $c_1 \times \sqrt{x}$, sachant qu'un seul produit coûte 24 €. Le coût de fabrication de x produits 2 suit la loi $c_2 \times \sqrt{5+x}$, sachant que 11 produits coûtent 240 € .*

Comment varient les bénéfices de l'entreprise suivant les quantités vendues pour chacun des deux produits ? Quelles sont les quantités de chacun des deux produits vendus qui font perdre le plus à l'entreprise ? À partir de quelle quantité, pour chacun des deux produits vendus, l'entreprise fait-elle des bénéfices ? Quelles sont les quantités générant le plus de bénéfice par produit vendu ? plus de 2€ par produit vendu ?

<u>*Exercice*</u> :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : x \longmapsto (1+x)^n$. Développer f(x)
2. En déduire deux expressions de f'(x) puis $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k = nx(1+x)^{n-1}$
3. Soit un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, calculer en utilisant 1. et 2. :

$\sum_{A\subset E} \mathrm{Card}(A)$, $\sum_{A,B\subset E} \mathrm{Card}(A \cup B)$ et $\sum_{A,B\subset E} \mathrm{Card}(A \cap B)$

(61)

<u>*Application du cours*</u> : Quels sont les nombres d'anagrammes de « math » et de « anagrammes » ?

<u>*Exercice*</u> : Soit E = {1 ; 2 ; ... ; n}. On a Card (E) = $n \in \mathbb{N}^*$. Un dérangement de tout ensemble F_p de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ est une permutation pour laquelle aucun des p éléments permutés d'un p-uplet de F_p n'est à la même place. *Ex : d : $F_3 \to F_3$ avec $F_3 = \{a_1 ; a_2 ; a_3\}$ et d : $(x, y, z) \longmapsto (y, z, x)$.*

Soit D_p le nombre de ces dérangements pour un ensemble F_p de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer D_1, D_2, D_3.
2) Combien y a-t-il de permutations de E laissant invariants exactement $k \leq n$ éléments ?
3) En déduire que $n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$.
4) Déterminer alors D_4 et D_5.

(62)

<u>*Application du cours*</u> : $C_n^k \leftrightarrow \binom{n}{k}$

Rappeler la formule de Pascal. En déduire $\forall$ (p, n) $\in \mathbb{N}^2$, p < n, $C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$.

<u>*Exercice*</u> :

1. Soit E_0, F_0 deux ensembles / Card (E_0) = 5 et Card (F_0) = 3.

Quel est le nombre d'applications surjectives de $E_0 \to F_0$?

2. Soit E, F deux ensembles et $n \in \mathbb{N}^*$/ Card (E) = n+2 et Card (F) = n.

Quel est le nombre d'applications surjectives de E $\to$ F ?

(63)

Application du cours : $C_n^k \leftrightarrow \binom{n}{k}$

1) Expliciter $\binom{n}{k}$ en fonction de k et de n.
2) Déterminer $\binom{n}{k} / \binom{n}{k+1}$ pour $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
3) En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\max(\binom{n}{k}, k \in \{0, ..., n\})$.

Exercice : Soit E et F deux ensembles de cardinaux respectifs p et n entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$. Déterminer en fonction de p et de n, le nombre d'applications...

1) ... de $E \to F$.
2) ... injectives de $E \to F$.
3) ... bijectives de $E \to E$.
4) ... strictement croissantes de $E \to F$.
5) ... croissantes de $E \to F$.

(64)

Application du cours :

Un jeu de cartes comporte 52 cartes, 13 valeurs de 4 couleurs. On tire 5 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ? un brelan ? un carré ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une couleur ? deux paires ? une suite ?

Exercice :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Développer $(1 + x)^n$, $(1 + x)^{2n}$, puis en déduire que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
2. Retrouver cette relation avec les ensembles $E = A \cup B$, $Card(A) = Card(B) = n$ et $A \cap B = \emptyset$. Considérer les parties $X \subset E$, $Card(X) = n \in \mathbb{N}^*$ telles que $X = Y \cup Z$, avec $Y \subset A$ et $Z \subset B$.

(65)

Application du cours : Donner la formule du crible pour 3 ensembles A, B, C et redémontrer la.

Exercice : Soit Γ_p^n le nombre de combinaisons de p éléments éventuellement répétés choisis parmi $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. On dispose de p objets à placer dans n rangements (éventuellement plusieurs par rangement).

1. Ecrire en code bits 2 objets dans le $3^{ème}$ rangement, 1 dans le $5^{ème}$ et 3 dans le $9^{ème}$ (pour $n = 10$)
Exemple : Pour 5 rangements, 2 objets dans le $3^{ème}$ et 1 dans le $5^{ème}$ s'écrit : 001101
2. Déduire le nombre Γ_6^{10} puis généraliser à Γ_p^n.
3. Montrer que le nombre de p-uplets solutions de l'équation $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$ est Γ_p^n

Colles de mathématiques en PTSI

. *Analyse – fonctions*

(1)

<u>*Question de cours*</u> : Calculer $\lim\limits_{0} \frac{\ln(1+\sin(x))+\left(\frac{x}{2}-1\right)\mathrm{sh}(x)}{\sin(x)+\mathrm{sh}(x)-2x}$, puis $\lim\limits_{0} \frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{1-x}\right)-\mathrm{Argth}(x)}{\cos(x)+\mathrm{ch}(x)-2}$.

<u>*Exercices*</u> :

1) Exprimer DL_5 (cos, $\frac{\pi}{4}$).

2) Exprimer DL_5 (Arccos, 0), puis DL_5 (Argth, 0) en utilisant $\mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ sur $]-1, 1[$.

(2)

<u>*Question de cours*</u> :

Calculer le DL en $\frac{\pi}{4}$ de cos puis $\lim_1 \frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$.

<u>*Exercice*</u> :

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2tx - y + t\cos t \\ y' = x + 2ty + t\sin t \end{cases}$

- en considérant la fonction $z = x + iy$ puis le ch^t de fonction inconnue défini par $z = u.e^{it}$.
- en effectuant pour le système homogène le ch^t de f° : $u = x.\exp(-t^2/2)$, $v = y.\exp(-t^2/2)$.

(3)

<u>*Question de cours*</u> :

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $0 < a < b$ et $f : x \longmapsto ((a^x + b^x) / 2)^{1/x}$.
Donner un équivalent de f en 0 et les limites de f en $\pm\infty$.

<u>*Exercice*</u> :

Résoudre $y'' + 3y' + y = (x^2 + x + 1).e^{2x+3}$, avec $y(0) = 1$, $y'(1) = 2$.

(4)

<u>*Question de cours*</u> :

Calculer $\int_0^{\pi} x.\sin(x)dx, \int_0^{1/2} \mathrm{Arcsin}(x)dx$ et par le ch^t de variables $u=\cos(x)$, $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{2+\cos^2(x)}dx$

Calculer $\int_1^2 \ln(x)dx$, puis $\int_1^2 x.\ln(x)dx$, $\int_1^2 \ln^2(x)dx$ et par le ch^t de var. $u = \sqrt{x}$, $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$.

<u>*Exercice*</u> :

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^4y'' + 2x^3y' - y = \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$ par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$.

. *Analyse - suites*

(5)

Questions de cours :

Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} \cos(\frac{k\pi}{6})$.

Exercice :

Déterminer en fonction d'un entier $n \geq 1$, $\sum_{k1+k2+k3=n} \binom{n}{k1}\binom{n}{k2}\binom{n}{k3}$.

(6)

Question de cours :

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} (k^2+n^2)^{-1}$ et $v_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n . n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Calculer en utilisant les sommes de Riemann, $\lim_{n\to\infty} u_n$ et $\lim_{n\to\infty} v_n$.

Exercice :

Déterminer la suite de $\mathbb{C}$: $z_0 = 1 + i$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

. *Complexes - trigonométrie*

(7)

<u>Question de cours</u> :

Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$, ω_k, les n solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^n = 1$ (racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité), puis montrer qu'elles forment un groupe dans $\mathbb{C}$. Calculer $\sum_k \omega_k$ et $\prod_k \omega_k$.

<u>Exercices</u> :

1) Résoudre $\cos(x) + \sin(x) = 1$.
Formules : $\cos(p) - \cos(q) = ?$, $\mathrm{ch}(p) - \mathrm{ch}(q) = ?$, $\mathrm{ch}(a - b) = ?$, $\mathrm{th}(a + b) = ?$
2) a) Calculer $(4 + 3i)^2$.
2) b) A partir de la décomposition canonique, résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 + (3 + 6i)z - \frac{17}{2} + 3i = 0$.

(8)

<u>Questions de cours</u> :

1) Soit $z = x + iy$, donner les formes algébriques puis les arguments de z^{-1}, z^{-2}.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = 16 - 30i$, puis $z^3 = 3 - 3i$.

<u>Exercices</u> :

1) En considérant $z = x + iy$, résoudre le système $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = \sqrt{3} \end{cases}$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$, $(1 + iz)^{2n} = (1 + i)(1 - iz)^{2n}$.

(9)

<u>Questions de cours</u> :

1) Étude de Arccos.
2) Formules : $\sin(x + \pi) = ?$ $\cos(x - \pi) = ?$ $\cos(x + \frac{3}{2}\pi) = ?$ $\cos(\frac{3}{4}\pi) = ?$ $\sin(\frac{10}{3}\pi) = ?$
3) Formules : $\sin(a)\sin(b) = ?$ $\cos(a - b) = ?$ $\tan(p) - \tan(q) = ?$ $\mathrm{th}(a + b) = ?$

<u>Exercices</u> :

1) Montrer que $\forall x \in]-1 ; 1[$, $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\mathrm{Argth}(x)$ et $\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$.
2) Résoudre $3^x = 2$; montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\cos(a + \frac{3}{4}\pi)\cos(a - \frac{3}{4}\pi) = \cos^2(a) - \frac{1}{2}$.

(10)

Questions de cours :

1) Étude de Argch et montrer que $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $\text{Argch}(x) = \ln(x + \sqrt{-1 + x^2})$.
2) Formules : $\cos(x - \pi) = ?$ $\sin(\frac{3}{2}\pi - x) = ?$ $\sin(\frac{41}{6}\pi) = ?$ $\tan(\frac{\pi}{6}) = ?$ $\cos(\frac{20}{3}\pi) = ?$
3) Formules : $\cos(p) - \cos(q) = ?$ $\cos(a)\cos(b) = ?$ $\tan(a + b) = ?$ $\tan(p) + \tan(q) = ?$

Exercices :

1) Résoudre $\cos(x) + \sqrt{3}.\sin(x) = 2$.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\text{ch}(x) + \text{sh}(x))^n = \text{ch}(nx) + \text{sh}(nx)$. En considérant la parité, exprimer alors ch(nx) et sh(nx) en fonction des puissances de ch(x) et de sh(x).

(11)

Questions de cours :

1) Étude de Argsh et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.
2) Formules : $\cos(x + \pi) = ?$ $\sin(x - \pi) = ?$ $\sin(x + \frac{3}{2}\pi) = ?$ $\sin(\frac{3}{4}\pi) = ?$ $\cos(\frac{10}{3}\pi) = ?$

Exercices :

1) Résoudre $\sqrt{3}.\cos(x) - \sin(x) = 1$.
2) Montrer que $\text{Arctan}(x) + \text{Arccotan}(x) = \frac{\pi}{2}$, puis que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \varepsilon\frac{\pi}{2}$, ε = *signe(x).*

. Algèbre linéaire

(12)

<u>Question de cours</u> :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. $f \circ f$ étant notée f^2, montrer que :

- $f^2 \in \mathcal{L}(E)$
- $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$
- $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f = E$

<u>Exercice</u> :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ non scalaire, montrer que $H_A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),\ AM = MA\}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, puis qu'une base de H_A est $\{I_2, A\}$. *Considérer pour $A=(a_{ij})$ les cas $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{12} \neq 0$ et $a_{21} \neq 0$.*

(13)

<u>Question de cours</u> :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie $f \circ f = id_E$. Montrer que f est la symétrie vectorielle sur $\operatorname{Ker}(f - id_E)$ selon $\operatorname{Ker}(f + id_E)$ et qu'il existe un projecteur p tel que $f = 2.p - id_E$.

<u>Exercice</u> :

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$

et $\mathfrak{B} = ((3,1,1,1)\ ;\ (-1,1,1,1)\ ;\ (0,1,-1,0))\ ;\ (0,1,0,-1))$.

Montrer que $\mathfrak{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Déterminer $\mathfrak{Mat}_{\mathfrak{B}}(u)$, puis en déduire A^n.

(14)

<u>Questions de cours</u> :

1) Définir l'intersection de deux sev d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E.

2) Soient A, B et C trois sev de E, quelles sont les propositions vraies :

- Si $A + B = E$, alors A et B sont supplémentaires.
- $A + B = A \cap B$ équivaut à $A = B$.
- $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$.

<u>Exercices</u> :

1) Soient p et q deux projecteurs, montrer que : $p + q$ est un projecteur $\Leftrightarrow p \circ q = - q \circ p$

2) Soit E un $\mathbb{K}$-ev, trouver l'ensemble des $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, tels que : $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$

3) Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Ker f et Im f sont supplémentaires, (ii) $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$, (iii) $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$, (iv) $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.

(15)

Question de cours :

Soient f et g des applications linéaires de E vers F, deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies.
Montrer que $|rg(f) – rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$.

Exercice :

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ la partie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications n fois dérivables ($n \in \mathbb{N}^*$). Quelles propositions sont vraies :

. $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et également de $\mathcal{D}_1(\mathbb{R})$.

. $\{y\in\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \,;\, y'' + y' – y = 2\}$ est un sev de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ et $\{y\in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}) \,;\, y' = xy\}$ est un sev de $\mathcal{D}_1(\mathbb{R})$

(16)

Question de cours :

Parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 2x – 3y + z = 0\}$, $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, \cos(x) = \sin(y)\}$, $E_3 =$
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xz = 0\}$, $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 – 3y^2 + z^2 = 5\}$, $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; e^x e^{2y} e^{-z} = 1\}$

Exercice :

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ / $\forall$ (i, j) $\in \{1, \ldots, n\}^2$, $a_{ij} = e_n^{(i-1).(j-1)}$, où $e_n = \exp(2i\pi/n)$.
Déterminer A^2, puis en déduire dét(A).

(17)

Question de cours :

Soient f et g des applications linéaires de E, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Montrer que $rg(g \circ f) \leq \min(rg(f), rg(g))$, *avec pour h linéaire de E, rg(h) = dim (Im h).*

Exercice :

Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall$ i $\in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$. Montrer que A est inversible.

(18)

Question de cours :

Soit f une application linéaire de E, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, nilpotente : $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. Montrer qu'$\exists$ a $\in$ E / $f^{p-1}(a) \neq 0$, que $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est libre, puis que $f^n = 0$.

Exercice :

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que $A = I_3 + 2J + 3J^2$, puis calculer $\forall$k, n J^k, A^n.

(19)

Question de cours :

Soit E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et un sev de E, F = Vect (f_0, f_1, f_2), où $f_k : x \longmapsto x^k.e^x$.
Montrer que $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de F et déterminer la matrice de $d : f \longmapsto f'$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice :

Soient $A(x,y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / a_{ii} = x$ et $a_{ij \neq i} = y$, $K_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / k_{ij} = 1$. Exprimer $A^p(x,y)$ avec I_n et K_n, $p \in \mathbb{N}$.

(20)

Questions de cours : Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ev normés. Montrer que :
$G = \{f : E \to F \; ; \; \exists k \in \mathbb{R}_+ \,/\, \forall (x,y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E\}$ est un sev du $\mathbb{K}$ev $\mathcal{C}(E, F)$.

Exercices :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ non scalaire, montrer que $H_A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), AM = MA\}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, puis qu'une base de H_A est $\{I_2, A\}$. *Considérer pour $A=(a_{ij})$ les cas $a_{12}=a_{21}=0$, $a_{12}\neq 0$ et $a_{21}\neq 0$.*
2. Soient A et B deux sev d'un $\mathbb{K}$ev E. Donner une CNS pour que $A + B = A \cap B$.
3. On munit $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ d'une loi interne « $*$ » définie par $(x,y) * (x',y') = (xx', y + y')$ et d'une loi externe « **.** » dans $\mathbb{R}$ définie par $\alpha \,.\, (x, y) = (x^{\alpha}, \alpha y)$. Montrer que $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, *, .)$ est un $\mathbb{R}$ev.

(21)

Questions de cours :

Parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 2x - 3y + z = 0\}$, $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 2x - y + z = 5\}$, $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; xz = 0\}$,
$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 - 3y^2 + z^2 = 5\}$, $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; e^x.e^{2y+5}.e^{-z} = 3\}$.
$E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z.(x^2 + y^2) = 0\}$.

Exercice :

Soit f une application linéaire de E, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, telle que $\forall x \in E$ $(x, f(x))$ est lié.
Montrer que f est une homothétie vectorielle. *i.e. : $\exists \alpha \in \mathbb{K} \,/\, f(x) = \alpha.x$.*

. *Géométrie*

(22)

<u>*Question de cours*</u> :

Réduction de l'équation d'une courbe $\mathcal{C}$ du plan euclidien : $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.

<u>*Exercice*</u> :

Construire la courbe $\mathcal{C}$: { (x, y) ; $x = \frac{t^3}{3t+1}$; $y = \frac{3t^2}{3t+1}$, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-1}{3}\right\}$}.

(23)

<u>*Question de cours*</u> :

Donner l'équation en polaire d'une droite dans le plan (xOy).

Donner l'équation en polaire d'un cercle dans (xOy), puis celle d'un cercle passant par O.

<u>*Exercices*</u> :

1) Construire la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{7\theta}{6\theta-\pi}$.

2) Construire la courbe $\mathcal{C}$: { (x, y) ; $x = \frac{6t^2-2t+5}{t^2+4}$; $y = \frac{10(t+3)}{t^2+3t+4}$, pour $t \in \mathbb{R}$ }.

(24)

<u>*Question de cours*</u> :

Définition bifocale puis par foyer et directrice d'une conique.

<u>*Exercices*</u> :

1) Calculer la distance de deux droites $\mathcal{D}_1$ (A_1 , $\overrightarrow{U_1}$) et $\mathcal{D}_2$ (A_2 , $\overrightarrow{U_2}$).

2) Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ / $A\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ d'éq. $\begin{cases}2x - y + z = 1\\3x + y + 2z = 2\end{cases}$

3) Calculer $[\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}\ ,\ \overrightarrow{e_r}\ ,\ \overrightarrow{e_z}]$, où $\overrightarrow{e_r}$: vecteur unitaire radial en coordonnées sphériques.

(25)

<u>*Question de cours*</u> :

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient deux points A (– 3 ; 1), B (1 ; 3), donner les équations cartésiennes puis polaires de la droite (AB), du cercle $\mathcal{C}$ passant par O, A et B, puis de la tangente de $\mathcal{C}$ au point A.

<u>*Exercices*</u> :

1) Construire la courbe $\mathcal{C}$: { (x, y) ; x = 2.Arctan(t) ; $y = \ln\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)$, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ }.

2) Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ / $A\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ d'éq. $\begin{cases}2x + y + z = 1\\3x + y + 2z = 2\end{cases}$

3) Calculer $[\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y}\ ,\ \overrightarrow{e_r}\ ,\ \overrightarrow{e_z}]$, où $\overrightarrow{e_r}$: vecteur unitaire radial en coordonnées sphériques.

. *Polynômes*

(26)

Question de cours :

$\forall$ n $\in$ {1,2,…,N}, $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que deg (P_{n+1}) > deg (P_n). Montrer que {P_n} est libre.

Exercice :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_k(X) \in \mathbb{R}_n[X]$, $P_k(X) = X^k.(1 - X)^{n-k}$.
Montrer que $(P_k(X))_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ en exprimant X^p en fonction des $P_k(X)$.

(27)

Question de cours :

Soient $Q_i(X) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} (X - a_j)$, pour i $\in$ {1,2,…,n+1} avec les a_i réels distincts deux à deux
Montrer que la famille {$Q_i(X)$} est libre.

Exercice :

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.
En déduire le reste de la division euclidienne de $X^4 + 4X^3 + 4X^2 - X - 2$ par $X^2 + X - 1$.