Colles de mathématiques en Bac+1

Aurélien Roudier

Colles de mathématiques en ECE-1 et ECS-1

. *Fonctions*

(1)

Application du cours : Donner des exemples de probabilité conditionnelle et d'espérance.

Exercice : Pour tout réel x où les fonctions suivantes sont définies,

$f(x) = \frac{e^{3x-5}}{2x+3}$, $g(x) = \frac{1}{2x+3}$ et $h(x) = e^{3x-5}$.

1) Sur quel ensemble f est-elle infiniment dérivable ?
2) Déterminer $f'(x)$, puis $f''(x)$.
3) En montrant que f est le produit de g et de h, déduire $f^{(n)}(x)$ d'après une formule à énoncer.
4) En déduire le polynôme P_n tel que $P_n(x) = f^{(n)}(x).(2x+3)^{n+1}.e^{-3x+5}$.

(2)

Application du cours : Énoncer le théorème des accroissements finis puis l'appliquer à la fonction ln pour montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \in \left]\frac{1}{n+1} ; \frac{1}{n}\right[$.

Exercice : Soit $f : x \mapsto 3x - 7$, $g : x \mapsto -2x + 5$.

1) Déterminer $(\exp(f))^{(k)}$, $(\exp(g))^{(k)}$, puis $(\exp(f+g))^{(n)}$ pour des entiers naturels k et n.
2) Rappeler la formule de Leibniz de la dérivée $n^{\text{ième}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) du produit de deux fonctions.
3) En déduire $(\exp(f) \times \exp(g))^{(n)}$ (vérifier ce résultat avec le 1)), puis $(\ln(f) \times \ln(g))^{(n)}$.

(3)

Application du cours :

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont injective, surjective ou bijective ?
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto |2x + 3| + x$, $f_2 : \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \longmapsto \text{Déc}(x)$, $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 4$

Exercice : Soit $f : x \longmapsto \frac{2x}{|x-1|+|x+1|}$ et $g : x \longmapsto \text{signe}(x^2 - 1)$

1. Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$ et représenter graphiquement f(x)
2. Trouver une relation entre f' et g

(4)

Application du cours :

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont injective, surjective ou bijective ?
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x + 3| + x + 4$, $f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto 2/\sqrt{x}$, $f_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4$

Exercice :

1. Soit $f : x \longmapsto x + |x|$. Comparer f' et $g : x \longmapsto 1 + \text{signe}(x)$.
2. Étudier la fonction $x \longmapsto \text{signe}(|x + 1| - |x - 1|) \times (|2x + 1| + x)$. Représentation graphique.

(5)

Application du cours :

Comparer $f(x) = 1/2 \times (1 + \text{signe}(1/2 - \text{Déc}(x/2)))$ et $g(x) = \text{Ent}(2 \times \text{Déc}((x+1)/2))$

Exercice : Soit $f : x \longmapsto \ln(x)$ et $g(x) = \ln(3x + 5) + 2 - \ln(3)$

1. Déterminer et représenter graphiquement signe(g(x)).
2. Déterminer et représenter graphiquement Ent(f) : $x \longmapsto \text{Ent}(f(x))$.
3. Montrer que $g(x) = f(x + a) + b$, où a et b sont des constantes à déterminer.
4. En déduire et représenter graphiquement Ent(g) : $x \longmapsto \text{Ent}(g(x))$.

(6)

Application du cours : Calculer $\int_1^2 \frac{t^3+4t^2+4t+2}{t^2+3t-1}\,dt$

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n(x) = \int_1^x (\ln t)^n\,dt$.

1. Pour quelles valeurs de x, $J_n(x)$ est-elle définie ?
2. Déterminer $J_1(x)$ puis $J_2(x)$ en intégrant par parties.
3. a) Montrer que $J_k(x) = x.(\ln x)^k - k.J_{k-1}(x)$, pour tout k entier supérieur ou égal à 2.

   b) On montre alors que $J_n(x) = (-1)^{n+1}.n! + x.\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(-1)^k (\ln x)^{n-k}$.

   Vérifier cette expression de $J_n(x)$ en la dérivant, ou (puis) en calculant $J_n(x) + nJ_{n-1}(x)$.

(7)

Application du cours : Donner un équivalent de $x^{-3,5}$ en 1. *On pourra poser $x = 1 + \varepsilon$.*

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, fonction paire telle que $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ pour $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $f(x) = a_4.x^4 + a_3.x^3 + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$ pour $x \in [-1 ; 1]$, où a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 sont des réels.

1) Pourquoi a-t-on $a_0 = 1$?
2) Montrer, puisque f est paire, que $a_3 = 0$ et $a_1 = 0$.
3) Quelle condition faut-il sur a_4 et a_2 pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?
4) Quelle condition faut-il sur a_4 et a_2 pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et f ' continue sur $\mathbb{R}$?
5) Déterminer alors a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 et donner deux expressions de f.

(8)

Application du cours : Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\ln(1+x)}-(1+x)^2}{\ln\left(\sqrt{1+x}\right)}$.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = (2X-3)^{n+3} + (4-2X)^{n+2} - 1$ et $Q_n(X) = X^n + 3X + 2$.

1) Quel est le coefficient en X^n de $P_n(X)$?
2) Montrer que $X - 3/2$, $X - 2$ et $X^2 - (7/2)X + 3$ divisent $P_n(X)$.
3) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $Q_n(X)$.
4) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $Q_2(X)$.

(9)

Application du cours :
Trouver une fonction convexe sur $\mathbb{R}_-$, concave sur $[0,1]$ et convexe sur $[1, +\infty[$.

Exercice :

1) Donner un équivalent en 0 de $\sqrt{1+x}$.
2) Montrer qu'un équivalent en 0 de $\sqrt{2+x}$ est $\sqrt{2} \times \left(1 + \frac{x}{4}\right)$.
3) En déduire un équivalent en 0 de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.
4) En déduire un équivalent en 0 de $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}$.

(10)
Application du cours :
Déterminer la concavité de la courbe représentant sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto x.\exp\left(\frac{-x^2}{2} + 1\right)$.

Exercice : Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 \times x^{1/x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et donner une expression de f avec une exponentielle.
2. f est-elle prolongeable par continuité ? De même pour f' là où f est dérivable ?
3. Montrer que $2x^4 + 1 - 2\ln x \geq \frac{3}{2} + \ln 2$, en déduire le signe de f' et le tableau de variations de f
4. Déterminer les tangentes en x = ½ et en x = 1.

(11)

Application du cours : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x + \sqrt{|1-3x|}}{\sqrt{|1+3x|} - x}$, $g : x \longmapsto f(x) + f(-x)$ et $h = \ln(f)$.

1. Déterminer les ensembles de définition de f, g et h. Étudier les parités de f, g et h.
2. Déterminer la continuité, la dérivabilité de f. Calculer f 'sur $]-1/3 ; +1/3[$ et en déduire g' et h'
3. En déduire les tangentes à la courbe représentant f en x = 0 et en x = 1/3.

Exercice : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{e^{2x} + 2e^{1-x}}{e^{-2x} + 2e^{1+x}}$, $g : x \longmapsto x \times (f(x) - f(-x))$ et $h = \ln(f)$.
1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f . Étudier les parités de f, g et h.
2. Calculer f(0), h(0), puis $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.
3. Déterminer f' puis la tangente à la courbe représentant f en x = 0.
4. Montrer que $X^4 - 2eX^3 + 2eX - 1 = (X^2 - 1)(X^2 - 2eX + 1)$, puis résoudre h(x) = 0.

(12)
Application du cours :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \ln(1+x^2)$ est-elle injective, surjective ou bijective ?
Déterminer sur un intervalle approprié sa fonction réciproque.

Exercice : Soit pour un réel a, $f_a : x \longmapsto \sqrt{x} / \ln(ax)$
1. Étudier f_1. Représentation graphique. En déduire l'étude de f_a.
2. Déterminer le nombre de solutions de $f_a(x) = c$ suivant les réels a et c.

(13)

Application du cours :

1. Définition et exemple de diagramme de Venn. 2. Quel est l'ensemble $\{(x,x), x \in A\}$?

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \{1, 2, ..., n\}$, $f_{n,p}(x) = 1/2 \times (1 + \text{signe}(p/n - \text{Dec}(x/n)))$.
Pour un réel u, Dec(u) est sa partie décimale et signe(u) = – 1 si u < 0, +1 si u > 0 et 0 si u = 0.

Déterminer et représenter graphiquement $f_{1,1}(x)$, $f_{2,1}(x)$, $f_{3,1}(x)$, $f_{5,3}(x)$, $f_{n,n}(x)$, $f_{n,p}(x) - f_{n,p-1}(x)$.

(14)

Application du cours :

Parmi les deux fonctions suivantes, lesquelles sont injective, surjective ou bijective ?
$f_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x + 1 - \sqrt{3x}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \longmapsto \text{Ent}(x)$, *avec Ent(x) : partie entière du réel x.*

Exercice : Soit la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + |x^2 - x - 1|)$.

1. Étudier f. Représentation graphique.
2. Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = a$ suivant $a \in \mathbb{R}$. Résoudre $f(x) = 1$.

(15)

Application du cours : Soit $f : x \mapsto 2 + \sqrt{3 + x}$. Déterminer f', $(f \circ f)'$, puis f^{-1} et $(f^{-1})'$ en précisant à chaque fois l'ensemble de définition de ces fonctions.

Exercice : Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

1. Donner une expression de f_0, f_1, f_2 et f_3.
2. Montrer que, pour $p \in \{0, 1, ..., n\}$, $f_n^{(p)}(x) = f_{n-p}(x)$ et déterminer $f_n'(x) - f_n(x)$.
3. Que vaut exp', e^0 et $f_n(0)$? En déduire que pour tout réel x fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^x$.
4. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!}$
5. Écrire alors un programme en Pascal permettant de vérifier avec une précision d'au moins 10^{-5} que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est bien e.

(16)

Application du cours :

Calculer en intégrant par parties $\int_1^3 \ln(1 + 2x)\,dx$, puis $\int_1^3 (2x - 3)\,e^{x-1}dx$.

Exercice : Soit $I(c) = \int_0^c \frac{dt}{1 - t + \sqrt{1+t}}$

1) Pour quelles valeurs de c, I (c) est-elle définie ?
2) Calculer I(c) avec le changement de variable $t \to u = \sqrt{1 + t}$
et en identifiant a et b telles que : $\frac{3u}{(2-u)(1+u)} = \frac{a}{2-u} + \frac{b}{1+u}$

. *Suites et séries*

(17)

Application du cours : Avec un DL_1, déterminer un équivalent en 3 de $\exp(\sqrt{1+2x})$.

Exercice : *On veut calculer* $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+...}}}$. Étude de $(U_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $U_{n+1} = \frac{1}{2+U_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $U_0 = 1$

1) Déterminer sa limite possible ℓ et on montrera que $|U_{n+1} - \ell| = \left|\frac{1}{2+U_n} - \frac{1}{\ell+2}\right| \leq \frac{1}{2\ell+4}\, |U_n - \ell|$.

2) En déduire que $|U_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2\ell+4}\right)^n |U_0 - \ell|$.

3) Écrire alors un programme en Python permettant de déterminer ℓ à 10^{-4} près.

(18)

Application de cours : Quel est le coefficient en $a^4.b^5.c^6$ de $(2a - b + c)^{15}$?

Exercice : Étude de $(U_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $U_{n+1} = \frac{{U_n}^2+3U_n-1}{{U_n}^2+2U_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $U_0 = 2$.

1) Si $(U_n)_{\mathbb{N}}$ converge, quelle est sa (ses) limite (s) ? *On montrera qu'une limite possible est 1.*

2) Montrer que $U_n \geq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3) Étudier la monotonie de $(U_n)_{\mathbb{N}}$. En déduire la convergence de $(U_n)_{\mathbb{N}}$.

4) Montrer que $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{3} \times |U_n - 1|$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

5) Étudier $(U_n)_{\mathbb{N}}$ pour $U_0 = 0{,}2$. *Donnée :* $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

(19)

Applications du cours :

1) Déterminer $n \in \mathbb{N}$ / $\sum_{i=1}^{n} (2i+3) = 15872$. Donnée : $\sqrt{63504} = 252$.

2) Calculer $\sum_{i=2}^{30} \ln\left(\frac{2i^2}{i^2-2i+1}\right)$, $\ln\left(\prod_{k=1}^{30} e^{3k-2}\right)$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2\sqrt{i})}{\ln(n!)}$, pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\,;1\}$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$(1 + u_{n+2})(2 + u_n)(2 + u_{n+1}) = (1 + u_{n+1})(2 + u_n)(2 + u_{n+2}) + 2(1 + u_n)(2 + u_{n+1})(2 + u_{n+2})$, $v_n = \frac{1+u_n}{2+u_n}$

1. Montrer que $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire v_n puis u_n en fonction de n. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Exprimer u_n en fonction de n pour $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

(20)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = u_3 = 2$, $u_1 = u_2 = 1$, $\prod_{k=0}^{4} u_{n+k}^{(k-0,5)(k-1)(k-3)} = 1$ et $v_n = \ln u_n$. Exprimer une relation de récurrence de $(v_n)_{\mathbb{N}}$. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(w_n)_{\mathbb{N}}$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$ avec $u_0 = u_1 = 1$ et $w_n = \alpha(-1)^n$ vérifiant $w_{n+2} = 2w_{n+1} + 2w_n + (-1)^n$.

1. Déterminer α, puis la relation de récurrence que vérifie $u_n - w_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4^n/2 + 1$.

(21)

Application du cours :

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n^2 + 2$, $v_n = a \times n^2 + b \times n + c$,

. Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n + n^2 + 2$.

. Montrer que la suite de terme g^{al} $u_n - v_n$ est géométrique. Déduire une expression de u_n en f° de n.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $v_0 = u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$,
$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour $n \to +\infty$.

(22)

Application de cours : Soit $(U_n)_{\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{\mathbb{N}}$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+3} = 3U_{n+1} - 2U_n$, $V_n = U_{n+1} - U_n$
et avec $U_0 = 5$, $U_1 = 2$, $U_2 = -1$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+2} + V_{n+1} = 2V_n$. En déduire que $(V_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite constante.
Déterminer alors $(U_n)_{\mathbb{N}}$ et calculer $\sum_{n=0}^{N} U_n$ pour $N \in \mathbb{N}$.

Exercice : Étude de $(U_n)_{\mathbb{N}}$ la suite telle que $U_{n+1} = \frac{3U_n+48}{31-4U_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $U_0 = \frac{15}{4}$

1) Déterminer les limites possibles. Montrer que $3 \leq U_n \leq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$, que $(U_n)_{\mathbb{N}}$ ↘ et converge.
2) Montrer que $(V_n)_{\mathbb{N}}$ la suite telle que $V_n = \frac{U_n-3}{U_n-4}$ pour $n \in \mathbb{N}$, est géométrique.
3) En déduire un expression de V_n, puis de U_n, en fonction de n.

(23)

Application du cours : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\binom{n}{1}\times\binom{n}{2}\times\binom{n}{3}}{(\sum_{k=1}^{n} k)\times(\sum_{k=1}^{n} k^3)}$

Exercice : Soit $(U_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{U_n^2+2U_n+1}{U_n^2+U_n}$.

1. Si $(U_n)_{\mathbb{N}}$ converge, montrer que ses limites sont $\ell = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$. Étudier la monotonie et déduire la convergence de $(U_n)_{\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $|U_{n+1} - L| \leq |\ell| \times |U_n - L|$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

(24)

Application du cours : Exprimer u_n en fonction de n pour $u_0 = u_3 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} + 4u_{n+2} + 4u_n = 0$.

Exercice : Soit $b > c > 0$, $f : x \longmapsto (x + b + c)^3 - 27bcx$ et $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$, $(w_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 > v_0 > w_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3}$, $v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n}$, $\frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\right)$.

1. Montrer que $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis que $u_n > v_n > w_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire les sens de variations de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et de $(w_n)_{\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - w_{n+1} \leq (2/3)(u_n - w_n)$, puis la convergence de $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$, $(w_n)_{\mathbb{N}}$.

(25)

Application du cours : En déterminant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n$, étudier la série de terme général $u_n = n^2(\ln n)^n/n!$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k}{2^n}$

1. Montrer que si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers 0, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge également vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie $\ell \neq 0$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

(26)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$, $(w_n)_{\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n)$, $u_0 = 3$, $v_0 = 4$, $w_n = v_n - u_n$ et $z_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

1. Montrer que $(w_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et que $(z_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. En déduire u_n et v_n en fonction de n, $\forall n \in \mathbb{N}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\sum_{n=2}^{30} u_n$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$

1. Exprimer v_n en fonction de n pour $u_k = 1 / k^2$, $1 / k$ et 1.
2. Pour $\ell = 0$, montrer que $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge également vers 0. La réciproque est-elle vraie ?
3. Pour $\ell \neq 0$, déduire que $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

(27)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

Déterminer l'équation caractéristique et en déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$, $(w_n)_{\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n + v_n)/2$, $v_{n+1} = (u_{n+1} + v_n)/2$, $u_0 = 3$, $v_0 = 4$, $w_n = v_n - u_n$ et $z_n = (u_n + 2v_n)/3$.

1. Montrer que $(w_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et que $(z_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite constante.

2. En déduire u_n et v_n en fonction de n, $\forall n \in \mathbb{N}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\sum_{n=2}^{30} u_n$.

(28)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k.\ln(1+1/k) - \ln(k)}{k(k+1)}$.

Montrer que $u_n = \ln(n+1)/(n+1)$ puis déterminer le sens de variations de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice : Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \binom{n+3}{n}^{-1}$, $b_n = (n+3)a_n$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

1. Montrer que $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ sont décroissantes et convergent vers 0.
2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$ que $(n+4)a_{n+1} = (n+1)a_n$, puis que $(n+2)a_{n+1} = (n+5)a_{n+2}$
3. En déduire par récurrence que $S_n = (1 - b_{n+1})/2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

(29)

Application du cours : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \ln(n+1) - \ln(n))^n$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{5u_n + 2}{u_n + 1}}$.

1. Calculer les limites éventuelles de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ en montrant que l'une d'elles est 2.
2. Montrer que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bien définie et est majorée par 2.
3. Étudier le sens de variations de $(u_n)_{\mathbb{N}}$. Conclure.
4. Étudier $(u_n)_{\mathbb{N}}$ pour $u_0 = 5$.

(30)

Application du cours : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{e^n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\binom{n}{3}}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$

Exercice : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k}$

1. Montrer que a_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer ${a_{n+1}}^2 - {a_n}^2$ en fonction de a_n puis donner l'éventuel sens de variations de $(a_n)_{\mathbb{N}}$
3. $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
4. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $a_{n+1}/a_n - 1 = 1/(a_n + a_{n+1})$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} - a_n$

(31)

Application du cours : Déterminer N en fonction d'un réel donné q vérifiant $\sum_{n=3}^{N-2} q^n = 1000$.

Exercice : Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}}$ avec $a_0 = 3$, $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{(a_n+2b_n)^5}$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{(a_n+2b_n)^5}$

On définit $(c_n)_{\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \ln(a_n + 2b_n)$ et $d_n = a_n/b_n$.

1. Montrer que $(d_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite constante. En déduire une relation entre a_n et b_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $(c_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En déduire c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. Déduire du 1. et du 2. les expressions de a_n et de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

(32)

Application du cours : Soit $(U_n)_{\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{n}{n+2}$, $V_n = \ln\left(e + \frac{2}{n(n+1)}\right)$
Montrer que ces deux suites sont adjacentes (l'une croissante, l'autre décroissante et convergeant vers la même limite.).

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$, $(w_n)_{\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{\mathbb{N}}$/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{7}(3u_n + 4v_n)$, $v_{n+1} = \frac{1}{7}(4u_n + 3v_n)$, $u_0 = 1$, $v_0 = 3$, $w_n = u_n - v_n$ et $z_n = u_n + v_n$.

1. Montrer que $(w_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et que $(z_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. En déduire u_n et v_n en fonction de n, $\forall n \in \mathbb{N}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\sum_{n=2}^{N} u_n$ et $\sum_{N=2}^{M}\sum_{n=2}^{N} u_n$.

(33)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} 3^k$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} 3^k$.
Exprimer $\ln(u_n)$ puis $\frac{u_n}{v_n}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice : Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$a_{n+1} = \frac{{a_n}^3}{{a_n}^2+a_nb_n+{b_n}^2}$, $b_{n+1} = \frac{{b_n}^3}{{a_n}^2+a_nb_n+{b_n}^2}$
On définit $(c_n)_{\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_n - b_n$ et $d_n = \ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

1. Déterminer $(c_n)_{\mathbb{N}}$. En déduire une relation entre a_n et b_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer $(d_n)_{\mathbb{N}}$. En déduire d_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Déduire du 1. et du 2. les expressions de a_n et de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
4. Dans le cas où $a_0 = b_0 = 2$, exprimer a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

(34)

Applications du cours : Déterminer U_n pour $(U_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $U_0 = 3$, $U_1 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$.
Calculer $\sum_{n=0}^{N} U_n$ en fonction de $N \in \mathbb{N}$.

Exercice : Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = 3$, $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{(a_n-b_n)^4}$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{(a_n-b_n)^4}$
On définit $(c_n)_{\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \ln(a_n - b_n)$ et $d_n = \frac{a_n}{b_n}$

1. Déterminer $(d_n)_{\mathbb{N}}$. En déduire ($\forall n \in \mathbb{N}$) une relation entre a_n et b_n.
2. Montrer que $(c_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En déduire c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Déduire du 1. et du 2. les expressions de a_n et de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$,

puis $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

4. Dans le cas où $a_0 = 3$, $b_0 = 2$, exprimer a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$,
puis $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

(35)

Application du cours : Soit $(U_n)_{\mathbb{N}}$, $(V_n)_{\mathbb{N}}$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 3U_n - 8$, $V_n = U_n - 4$ et $U_0 = 1$.
Exprimer U_n en fonction de n puis calculer $\sum_{n=2}^{N} U_n$ pour $N \geq 2$.

Exercice : Soit $q \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{{a_{n+1}}^8}{{a_n}^{16}}$, $b_n = \ln a_n$.

1. Trouver une relation entre b_n, b_{n+1} et b_{n+2}, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une expression de b_n puis de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Exprimer $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ puis f '(x) sous deux formes. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k \times q^k$ en fonction de q, n
4. Calculer $\sum_{n=0}^{N} b_n$ en fonction de $N \in \mathbb{N}$.

(36)

Application du cours : Exprimer $\sum_{k=1}^{n} \frac{-8k^3-20k^2+2k+7}{1-4k^2}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} = \frac{n+1}{n+3} u_n$, $v_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} v_n$, $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

1. Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis identifier à $\frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+3} + \frac{c}{n+4}$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de S_n, puis montrer ou admettre que $S_n \sim \ln n + \gamma$ et calculer, si elle existe, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.
3. Exprimer v_n en fonction de n puis montrer que :
$2\times\sum_{k=1}^{n+1} kv_k + 5\times\sum_{k=1}^{n+1} v_k = 2\times\sum_{k=0}^{n} kv_k + 2\times\sum_{k=0}^{n} v_k$.

(37)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq v_n$, puis en déduire le sens de variations de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq (u_n - v_n)/2$. Exprimer alors $u_n \times v_n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, telle que $u_0 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = (x + \ln x)e^{x-1}$.

1. Si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge, quelle équation résoud sa(ses) limite(s) ℓ.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$. En déduire la monotonie de $(u_n)_{\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $u_n \geq e^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(38)

Application du cours :

Etudier suivant $\alpha \in \mathbb{R}_+$ la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\left[(n+1)^{1+1/n} - (n-1)^{1-1/n}\right]$.

Exercice : Soit $(u_n)_\mathbb{N}$, $(U_n)_\mathbb{N}$ et $(V_n)_\mathbb{N}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}$, $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Exprimer u_n en fonction de n, puis U_n en trois sommes.
2. Exprimer U_n en fonction de n, V_n et V_{2n+1}.
3. En montrant ou en admettant que $V_n \sim \ln n$, calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

(39)

Application du cours : Soit $(U_n)_\mathbb{N}$ et $(V_n)_\mathbb{N}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$, $V_n = U_n + \frac{1}{n}$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Exprimer ces deux suites en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice : Soit $(u_n)_\mathbb{N}$ et $(\varepsilon_n)_\mathbb{N}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \times u_{n+1} = n$ et $1 + \varepsilon_n = u_{n+1} / u_n$.

1. Trouver une relation entre u_n et ε_n puis une relation de récurrence de $(\varepsilon_n)_\mathbb{N}$.
2. Exprimer ε_n en fonction de n (pair ou bien impair).
3. Déterminer un équivalent aux termes de la série correspondant à $\ln(1 + \varepsilon_n)$.
4. En déduire la convergence de $\frac{1+\varepsilon_n}{1+\varepsilon_1}$ vers $\ell \in \,]0, 1[$. Déterminer ε_1 tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

(40)

Application du cours : Soit $(u_n)_\mathbb{N}$ et $(\varepsilon_n)_\mathbb{N}$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \times u_{n+1} = n$ et $1 + \varepsilon_n = u_{n+1} / u_n$

Trouver une relation de récurrence de $(\varepsilon_n)_\mathbb{N}$ et exprimer ε_n en fonction de n (pair ou bien impair).

Exercice :

Soit $(u_n)_\mathbb{N}$ telle que $u_0 = -1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + 2e^x$.

1. Montrer qu'il n'existe qu'une racine ℓ de f, unique limite possible de $(u_n)_\mathbb{N}$, avec $\ell \in [-2, -1]$.
2. Montrer que $\forall x \geq 0,\ -1 \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \ell$. Conclure. Représentation graphique.

(41)

Application du cours :

Déterminer un équivalent et la limite de $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, $\sqrt{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}$.

Exercice :

Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \exp\left(1 + n(x^2 - x)\right)$ et $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$, suite de terme g^al^ la sol° de $(e_n) : f_n(x) = 3$

1. Etudier $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n en précisant les coordonnées et limites pour $n \to +\infty$ de leur extrémum.
2. Calculer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0)$ et $f_n(1)$, puis montrer que $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ est minorée par 1 et décroissante.
3. Montrer que $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(42)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k.\ln(1+1/k) - \ln(k)}{k(k+1)}$

Montrer que $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ puis déterminer le sens de variations de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice : Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$a_n = \binom{n+3}{n}^{-1}$, $b_n = (n+3)a_n$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

1. Montrer que $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ sont décroissantes et convergent vers 0.
2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$ que $(n+4)a_{n+1} = (n+1)a_n$, puis que $(n+2)a_{n+1} = (n+5)a_{n+2}$.
3. En déduire par récurrence que $S_n = (1 - b_{n+1})/2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

(43)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(R_n)_{\mathbb{N}}$, $(S_n)_{\mathbb{N}}$ telles que :

$(S_n)_{\mathbb{N}}$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $u_n \sim R_n^2$.

Déterminer un équivalent (en $+\infty$) de $1/R_n - 1/R_{n-1}$ en fonction de u_n et R_n.

En déduire un équivalent de $1/R_n$ puis u_n en fonction de n.

Exercice : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \times u_{n+1} = n$ et $1 + \varepsilon_n = u_{n+1} / u_n$

1. Trouver une relation entre u_n et ε_n puis une relation de récurrence de $(\varepsilon_n)_{\mathbb{N}}$.
2. Exprimer ε_n en fonction de n (pair ou bien impair).
3. Déterminer un équivalent aux termes de la série correspondant à $\ln(1 + \varepsilon_n)$.
4. En déduire la convergence de $\frac{1+\varepsilon_n}{1+\varepsilon_1}$ vers $\ell \in]0, 1[$. Déterminer ε_1 tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

(44)

Application du cours : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4}$, $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

Montrer que $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est arithmétique, puis exprimer u_n en fonction de n

Exercice : Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \longmapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n - ½$ et $(u_n)_{\mathbb{N}}$ telle que u_n est l'unique racine positive de f_n.

1. Montrer que u_n est bien définie et unique.
2. Étudier f_n, puis montrer que $1 \leq u_n \leq 1 + 2/n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la convergence de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(45)

Application du cours : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{3}\right)^n$.

Exercice : Soit $f_n : x \longmapsto x^{n+1} - x$ et $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$, suite de terme général la solution positive de (E_n) : $f_n(x) = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

1. Etudier f_n sur $\mathbb{R}_+$ en précisant les coordonnées de son extrémum et leurs limites pour $n \to +\infty$
2. Montrer que $f_n(0) = f_n(1) = 0$, puis que $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ est minorée par 1 et décroissante.
3. Montrer que $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

. *Polynômes*

(46)

<u>*Application du cours*</u> : Déduire de la formule de Newton une expression de $(a + b)^3$ et $(a - b)^3$.
Soit $A_n = \sum_{k=1}^{n}(k^3 + 3k)$, $B_n = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 1)$. Que valent $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$?
En déduire A_n et B_n. Vérifier ce résultat en calculant directement A_n et B_n.

<u>*Exercice*</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $P_n(X) = \left(\frac{5-X}{2}\right)^n + \left(\frac{X-1}{2}\right)^n - 2^n$.

1) Si $n > 3$, quel est le coefficient en X^3 de $P_n(X)$?

2) Montrer que $X - 1$, $X - 5$ et $X^2 - 6X + 5$ divisent $P_n(X)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, le reste de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $P_2(X)$.

4) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $P_{n-2}(X)$.

(47)

<u>*Application du cours*</u> : Résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x \times (2y - 3) = -1 \end{cases}$

<u>*Exercice*</u> : Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, vérifiant $-3P(X) + 2P'(X) + P''(X) = X^n + \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Que valent a_n, a_{n-1} et a_{n-2} ?

2) Donner une relation de récurrence de la suite des coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}, k\leq n}$.

3) Montrer par une récurrence sur k que $a_{n-k} = \left(-\frac{1}{3}\right)^k \times \frac{n!}{(n-k)!}$.

4) Que vaut α ? Donner une expression de P(X).

(48)

<u>*Application du cours*</u> : Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n_3=1}^{n} \sum_{n_2=1}^{n_3} \sum_{n_1=1}^{n_2} n_1$.

<u>*Exercice*</u> : Soit un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ scindé, c'est à dire que $P(X) = k.\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)^{m_i}$,
où $k \in \mathbb{R}^*$, les a_i, racines de P, sont des réels distincts, et les m_i des entiers supérieurs ou égaux à 1.

1) Déterminer une expression de P'(X). *Rappel : (fg)' = f'g + fg', (fgh)' = f'gh + fg'h + fgh', ...*

2) En déduire que $Q(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i)^{m_i-1}$ divise P'(X).
C'est à dire que le reste de la division euclidienne de P' par Q est le polynôme nul.

3) Pour quelles valeurs de m_i, a_i est-elle également une racine de P' ?

4) Représenter graphiquement des exemples de ces polynômes P(X) et déduire le nombre des autres racines de P' que celles trouvées au 3).

5) En déduire que P' est également scindé. *Rappel : deg (P') = deg (P) – 1.*

(49)

Application du cours : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) = \prod_{p=1}^{n}(X - p)$

En écrivant pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, calculer a_n, a_0, a_{n-1}, a_{n-2} en fonction de n et trouver un équivalent de a_1 en $+\infty$.

Exercice : Soit un entier n, $P_n \in \mathbb{C}[X]$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+X)^k}{2^k}$

1. Calculer $P_n(-1)$, $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(3)$.
2. Montrer que $1 - X = 2\left(1 - \frac{(1+X)}{2}\right)$, puis exprimer $P_n(X)(1 - X)$.
3. En déduire les racines de P_n puis factoriser $P_n(X)$.
4. En déduire $\prod_{k=1}^{n}\left(2 \exp i\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) - 1\right)$.

(50)

Applications du cours : Enoncer la formule de Taylor pour un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$

En déduire que $P^{(j)}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+j)}(0)}{k!}$ puis $P(X+1) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+j)}(0)}{j!\,k!} X^j = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$

Exercice : Soit A et B $\in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^3 + 1)A(X) + (X^2 + X + 1)B(X) = 1$

1. Montrer que $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$.
En déduire deux solutions de (E) : $A_0(X) = \frac{1}{2}$ et $B_0(X) = \frac{1}{2}(1 - X)$
2. Montrer que le reste de la division euclidienne de $A(X)$ par $X^2 + X + 1$ est $A_0(X)$ avec un quotient $P(X)$.
3. Montrer que le reste de la division euclidienne de $B(X)$ par $-(X^3 + 1)$ est $B_0(X)$ avec le même quotient.
4. Conclure.

(51)

Application du cours : Soit $(P_n(X))_{\mathbb{N}}$, une suite de polynômes telle que :

$P_{n+2}(X) - (X+1)P_{n+1}(X) - X^2P_n(X) = 0$ et $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = \frac{X+1}{2}$

1. Déterminer pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x_0)$.
En déduire $P_n(X)$ en l'exprimant en une somme de monômes.
2. Exprimer $P_n(1)$ en fonction de n, puis $\sum_{n=2}^{N+2} P_n(1)$ en fonction de $N \in \mathbb{N}$.

Exercice : Soit un entier $n \geq 2$, $P_n(X) = (X + 1)^n - (X - 1)^n \in \mathbb{C}[X]$

1. Exprimer $P_n(X)$ en une somme de monômes.
2. Déterminer les racines de P_n puis factoriser $P_n(X)$.
3. En déduire $\sum_{k=1}^{n-1} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\prod_{k=1}^{n-1} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

(52)

Application du cours : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) = \prod_{p=1}^{n}(X - p)$.

En écrivant $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, calculer a_n, a_0, a_{n-1}, a_{n-2} en fonction de n et trouver un équivalent de a_1 pour $n \to +\infty$.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = (2X - 3)^{n+3} + (4 - 2X)^{n+2} - 1$ et $Q_n(X) = X^n + 3X + 2$.

1. Quel est le coefficient en X^n de $P_n(X)$?
2. Montrer que $X - 3/2$, $X - 2$ et $X^2 - (7/2)X + 3$ divisent $P_n(X)$.
3. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $Q_n(X)$.
4. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $Q_2(X)$.

(53)

Application du cours : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.

1. Montrer que les racines de P sont de module 1.
2. En déduire que si a est racine de P, alors $|a| = |a + 1| = 1$.
3. En déduire que les racines de P sont $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{4i\frac{\pi}{3}}$ et de même multiplicité.
4. Exprimer P(X).

Exercice : Soit un entier $n \geq 2$, $P_n(X) = (X + 1)^n - (X - 1)^n \in \mathbb{C}[X]$

1. Exprimer $P_n(X)$ en une somme de monômes.
2. Déterminer les racines de P_n puis factoriser $P_n(X)$.
3. En déduire $\sum_{k=1}^{n-1} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\prod_{k=1}^{n-1} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ *(cotan : $x \longmapsto \cos(x) / \sin(x)$).*

(54)

Applications du cours : Enoncer la formule de Taylor pour un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$.

En déduire que $P^{(j)}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+j)}(0)}{k!}$ puis $P(X+1) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+j)}(0)}{j!\,k!} X^j = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$

Exercice : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$.

1. Montrer que X divise P(X)
2. En déduire que X + 1, X + 2 et X + 3 divisent également P(X)
3. En écrivant $P(X) = X(X + 1)(X + 2)(X + 3)Q(X)$, montrer que Q est un polynôme constant.
4. Conclure.

(55)

Application du cours : Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(1 + 2 \times (3x - 5)^2)^2 = 29 - 30x + 9x^2$.

Exercice :

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) = n \in \mathbb{N}^*$ et $P(k) = (-1)^{n-k} \times k! \times (n-k)!$, $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

1. Montrer que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (X - j)$.
2. Déterminer P(n+1). Exprimer P’(X) puis P’’(X).

. *Matrices*

(56)

Application du cours : Trouver un polynôme annulateur de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, puis l'inversibilité et A^{-1}.

Exercice : Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A = I_3 - B$ et déterminer deux réels, a et b, tels que $B = aC + bC^2$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^{n} AB^k$, $\sum_{k=0}^{n} B^k A$ en fonction de I_3 et B^{n+1}. Calculer C^n, puis B^{n+1}.

3) En déduire que A est inversible en déterminant A^{-1}.

4) Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(57)

Application du cours : Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 1/3 & 0 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$, calculer A^2, puis en déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A^n.

Exercice : Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

1) Montrer que P_1 est inversible et que $P_1 = P_2^{-1}$.

2) Montrer que $P_1AP_2 = J$, avec la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^3 = 0_3$.

3) En déduire J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis A^k et $\exp(A) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$

4) Si A est inversible, déterminer A^{-1}.

(58)

Application du cours : Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$, trouver un polynôme annulateur puis A^{-1} et A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 36 \\ 1/6 & 0 & 5 \\ 1/36 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A^2 - A - 2I_3 = 0$.

2) En déduire A^{-1}, puis A^n en utilisant la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$.

(59)

Application du cours : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, déterminer un polynôme annulateur de A, puis A^{-1}.

Exercice : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est unipotente, c'est à dire : $\exists\, N \in \mathbb{N}^* \,/\, (A - I_n)^N = 0_n$

1) Montrer que A est inversible.

2) Montrer pour tout $p \in \mathbb{N}$ que $A^2, A^3, \ldots, A^p$, puis que A^{-1}, sont également unipotentes.

. *Ensembles, probabilités*

(60)

<u>*Application du cours*</u> : *Une entreprise vend à un grossiste ses produits 1 et 2 aux prix unitaires $p_1 = 4$ € et $p_2 = 6$ €. Le coût de fabrication de x produits 1 suit la loi $c_1 \times \sqrt{x}$, sachant qu'un seul produit coûte 24 €. Le coût de fabrication de x produits 2 suit la loi $c_2 \times \sqrt{5+x}$, sachant que 11 produits coûtent 240 € .*

Comment varient les bénéfices de l'entreprise suivant les quantités vendues pour chacun des deux produits ? Quelles sont les quantités de chacun des deux produits vendus qui font perdre le plus à l'entreprise ? À partir de quelle quantité, pour chacun des deux produits vendus, l'entreprise fait-elle des bénéfices ? Quelles sont les quantités générant le plus de bénéfice par produit vendu ? plus de 2€ par produit vendu ?

<u>*Exercice*</u> :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : x \longmapsto (1 + x)^n$. Développer f(x)
2. En déduire deux expressions de f '(x) puis $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k = nx(1+x)^{n-1}$
3. Soit un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, calculer en utilisant 1. et 2. :

$\sum_{A\subset E} \mathrm{Card}(A)$, $\sum_{A,B\subset E} \mathrm{Card}(A \cup B)$ et $\sum_{A,B\subset E} \mathrm{Card}(A \cap B)$

(61)

<u>*Application du cours*</u> : Quels sont les nombres d'anagrammes de « math » et de « anagrammes » ?

<u>*Exercice*</u> : Soit E = {1 ; 2 ; ... ; n}. On a Card (E) = $n \in \mathbb{N}^*$. Un dérangement de tout ensemble F_p de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ est une permutation pour laquelle aucun des p éléments permutés d'un p-uplet de F_p n'est à la même place. *Ex : d : $F_3 \to F_3$ avec $F_3 = \{a_1 ; a_2 ; a_3\}$ et d : $(x, y, z) \longmapsto (y, z, x)$.*
Soit D_p le nombre de ces dérangements pour un ensemble F_p de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer D_1, D_2, D_3.
2) Combien y a-t-il de permutations de E laissant invariants exactement $k \leq n$ éléments ?
3) En déduire que $n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$.
4) Déterminer alors D_4 et D_5.

(62)

<u>*Application du cours*</u> : $C_n^k \longleftrightarrow \binom{n}{k}$

Rappeler la formule de Pascal. En déduire $\forall$ (p, n) $\in \mathbb{N}^2$, p < n, $C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$.

<u>*Exercice*</u> :

1. Soit E_0, F_0 deux ensembles / Card (E_0) = 5 et Card (F_0) = 3.
Quel est le nombre d'applications surjectives de $E_0 \to F_0$?
2. Soit E, F deux ensembles et $n \in \mathbb{N}^*$/ Card (E) = n+2 et Card (F) = n.
Quel est le nombre d'applications surjectives de $E \to F$?

(63)

Application du cours : $C_n^k \longleftrightarrow \binom{n}{k}$

1) Expliciter $\binom{n}{k}$ en fonction de k et de n.
2) Déterminer $\binom{n}{k} / \binom{n}{k+1}$ pour $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
3) En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\max(\binom{n}{k}, k \in \{0, ..., n\})$.

Exercice : Soit E et F deux ensembles de cardinaux respectifs p et n entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$. Déterminer en fonction de p et de n, le nombre d'applications...

1) ... de $E \to F$.
2) ... injectives de $E \to F$.
3) ... bijectives de $E \to E$.
4) ... strictement croissantes de $E \to F$.
5) ... croissantes de $E \to F$.

(64)

Application du cours :

Un jeu de cartes comporte 52 cartes, 13 valeurs de 4 couleurs. On tire 5 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ? un brelan ? un carré ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une couleur ? deux paires ? une suite ?

Exercice :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Développer $(1 + x)^n$, $(1 + x)^{2n}$, puis en déduire que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
2. Retrouver cette relation avec les ensembles $E = A \cup B$, Card(A) = Card(B) = n et $A \cap B = \emptyset$. Considérer les parties $X \subset E$, Card(X) = $n \in \mathbb{N}^*$ telles que $X = Y \cup Z$, avec $Y \subset A$ et $Z \subset B$.

(65)

Application du cours : Donner la formule du crible pour 3 ensembles A, B, C et redémontrer la.

Exercice : Soit Γ_p^n le nombre de combinaisons de p éléments éventuellement répétés choisis parmi $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. On dispose de p objets à placer dans n rangements (éventuellement plusieurs par rangement).

1. Ecrire en code bits 2 objets dans le 3ème rangement, 1 dans le 5ème et 3 dans le 9ème (pour n = 10)
Exemple : Pour 5 rangements, 2 objets dans le 3ème et 1 dans le 5ème s'écrit : 001101
2. Déduire le nombre Γ_6^{10} puis généraliser à Γ_p^n.
3. Montrer que le nombre de p-uplets solutions de l'équation $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$ est Γ_p^n

Colles de mathématiques en PTSI

. *Analyse – fonctions*

(1)

Question de cours : Calculer $\lim_{0} \frac{\ln(1+\sin(x))+\left(\frac{x}{2}-1\right)\text{sh}(x)}{\sin(x)+\text{sh}(x)-2x}$, puis $\lim_{0} \frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{1-x}\right)-\text{Argth}(x)}{\cos(x)+\text{ch}(x)-2}$.

Exercices :

1) Exprimer DL_5 (cos, $\frac{\pi}{4}$).

2) Exprimer DL_5 (Arccos, 0), puis DL_5 (Argth, 0) en utilisant Argth(x) = $\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ sur]–1, 1[.

(2)

Question de cours :

Calculer le DL en $\frac{\pi}{4}$ de cos puis $\lim_{1} \frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$.

Exercice :

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2tx - y + t\cos t \\ y' = x + 2ty + t\sin t \end{cases}$

- en considérant la fonction z = x + iy puis le ch^t de fonction inconnue défini par z = u.e^{it}.
- en effectuant pour le système homogène le ch^t de f° : u = x.exp(– t^2/2), v = y.exp(– t^2/2).

(3)

Question de cours :

Soient (a, b) ∈ $\mathbb{R}^2$, 0 < a < b et f : x ⟼ ((a^x + b^x) / 2)$^{1/x}$.
Donner un équivalent de f en 0 et les limites de f en $\pm\infty$.

Exercice :

Résoudre y’’ + 3y’ + y = (x^2 + x + 1).e^{2x+3}, avec y(0) = 1, y’(1) = 2.

(4)

Question de cours :

Calculer $\int_0^{\pi} x.\sin(x)dx$, $\int_0^{1/2} \text{Arcsin}(x)dx$ et par le ch^t de variables u=cos(x), $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{2+\cos^2(x)}dx$

Calculer $\int_1^2 \ln(x)dx$, puis $\int_1^2 x.\ln(x)dx$, $\int_1^2 \ln^2(x)dx$ et par le ch^t de var. u = $\sqrt{x}$, $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$.

Exercice :

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, x^4y’’ + 2x^3y’ – y = ch$\left(\frac{1}{x}\right)$ par le changement de variable t = $\frac{1}{x}$.

. *Analyse - suites*

(5)

Questions de cours :

Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} \cos(\frac{k\pi}{6})$.

Exercice :

Déterminer en fonction d'un entier $n \geq 1$, $\sum_{k1+k2+k3 = n} \binom{n}{k1}\binom{n}{k2}\binom{n}{k3}$.

(6)

Question de cours :

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} (k^2+n^2)^{-1}$ et $v_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n.n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Calculer en utilisant les sommes de Riemann, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Exercice :

Déterminer la suite de $\mathbb{C}$: $z_0 = 1 + i$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

. *Complexes - trigonométrie*

(7)

<u>*Question de cours*</u> :

Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$, ω_k, les n solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^n = 1$ (racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité), puis montrer qu'elles forment un groupe dans $\mathbb{C}$. Calculer $\sum_k \omega_k$ et $\prod_k \omega_k$.

<u>*Exercices*</u> :

1) Résoudre $\cos(x) + \sin(x) = 1$.
Formules : $\cos(p) - \cos(q) = ?$, $\mathrm{ch}(p) - \mathrm{ch}(q) = ?$, $\mathrm{ch}(a - b) = ?$, $\mathrm{th}(a + b) = ?$
2) a) Calculer $(4 + 3i)^2$.
2) b) A partir de la décomposition canonique, résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 + (3 + 6i)\,z - \frac{17}{2} + 3i = 0$.

(8)

<u>*Questions de cours*</u> :

1) Soit $z = x + iy$, donner les formes algébriques puis les arguments de z^{-1}, z^{-2}.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = 16 - 30i$, puis $z^3 = 3 - 3i$.

<u>*Exercices*</u> :

1) En considérant $z = x + iy$, résoudre le système $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = \sqrt{3} \end{cases}$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$, $(1 + iz)^{2n} = (1 + i)(1 - iz)^{2n}$.

(9)

<u>*Questions de cours*</u> :

1) Étude de Arccos.
2) Formules : $\sin(x + \pi) = ?$ $\cos(x - \pi) = ?$ $\cos(x + \frac{3}{2}\pi) = ?$ $\cos(\frac{3}{4}\pi) = ?$ $\sin(\frac{10}{3}\pi) = ?$
3) Formules : $\sin(a)\sin(b) = ?$ $\cos(a - b) = ?$ $\tan(p) - \tan(q) = ?$ $\mathrm{th}(a + b) = ?$

<u>*Exercices*</u> :

1) Montrer que $\forall x \in]-1 ; 1[$, $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\mathrm{Argth}(x)$ et $\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$.
2) Résoudre $3^x = 2$; montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\cos(a + \frac{3}{4}\pi)\cos(a - \frac{3}{4}\pi) = \cos^2(a) - \frac{1}{2}$.

(10)

Questions de cours :

1) Étude de Argch et montrer que $\forall x \in \,]1 ; +\infty[$, $\text{Argch}(x) = \ln(x + \sqrt{-1 + x^2})$.
2) Formules : $\cos(x - \pi) = ?$ $\sin(\frac{3}{2}\pi - x) = ?$ $\sin(\frac{41}{6}\pi) = ?$ $\tan(\frac{\pi}{6}) = ?$ $\cos(\frac{20}{3}\pi) = ?$
3) Formules : $\cos(p) - \cos(q) = ?$ $\cos(a)\cos(b) = ?$ $\tan(a + b) = ?$ $\tan(p) + \tan(q) = ?$

Exercices :

1) Résoudre $\cos(x) + \sqrt{3}.\sin(x) = 2$.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\text{ch}(x) + \text{sh}(x))^n = \text{ch}(nx) + \text{sh}(nx)$. En considérant la parité, exprimer alors ch(nx) et sh(nx) en fonction des puissances de ch(x) et de sh(x).

(11)

Questions de cours :

1) Étude de Argsh et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.
2) Formules : $\cos(x + \pi) = ?$ $\sin(x - \pi) = ?$ $\sin(x + \frac{3}{2}\pi) = ?$ $\sin(\frac{3}{4}\pi) = ?$ $\cos(\frac{10}{3}\pi) = ?$

Exercices :

1) Résoudre $\sqrt{3}.\cos(x) - \sin(x) = 1$.
2) Montrer que $\text{Arctan}(x) + \text{Arccotan}(x) = \frac{\pi}{2}$, puis que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \varepsilon\frac{\pi}{2}$, ε = *signe(x)*.

. *Algèbre linéaire*

(12)

<u>*Question de cours*</u> :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. f o f étant notée f^2, montrer que :

- $f^2 \in \mathcal{L}(E)$
- $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$
- $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f = E$

<u>*Exercice*</u> :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ non scalaire, montrer que $H_A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),\ AM = MA\}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, puis qu'une base de H_A est $\{I_2, A\}$. *Considérer pour* $A=(a_{ij})$ *les cas* $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{12} \neq 0$ *et* $a_{21} \neq 0$.

(13)

<u>*Question de cours*</u> :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie $f \circ f = id_E$. Montrer que f est la symétrie vectorielle sur Ker $(f - id_E)$ selon Ker $(f + id_E)$ et qu'il existe un projecteur p tel que $f = 2.p - id_E$.

<u>*Exercice*</u> :

Soient $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B} = ((3,1,1,1)\ ;\ (-1,1,1,1)\ ;\ (0,1,-1,0))\ ;\ (0,1,0,-1))$.

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Déterminer $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$, puis en déduire A^n.

(14)

<u>*Questions de cours*</u> :

1) Définir l'intersection de deux sev d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E.
2) Soient A, B et C trois sev de E, quelles sont les propositions vraies :
   - Si A + B = E, alors A et B sont supplémentaires.
   - $A + B = A \cap B$ équivaut à $A = B$.
   - $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$.

<u>*Exercices*</u> :

1) Soient p et q deux projecteurs, montrer que : p + q est un projecteur $\Leftrightarrow p \circ q = - q \circ p$
2) Soit E un $\mathbb{K}$-ev, trouver l'ensemble des $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, tels que : $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$
3) Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) Ker f et Im f sont supplémentaires, (ii) Ker f + Im f = E, (iii) $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$, (iv) $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$.

(15)

Question de cours :

Soient f et g des applications linéaires de E vers F, deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies.
Montrer que $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$.

Exercice :

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ la partie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications n fois dérivables ($n \in \mathbb{N}^*$). Quelles propositions sont vraies :

. $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et également de $\mathcal{D}_1(\mathbb{R})$.

. $\{y \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}) ; y'' + y' - y = 2\}$ est un sev de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ et $\{y \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}) ; y' = xy\}$ est un sev de $\mathcal{D}_1(\mathbb{R})$

(16)

Question de cours :

Parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x - 3y + z = 0\}$, $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \cos(x) = \sin(y)\}$, $E_3 =$
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xz = 0\}$, $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - 3y^2 + z^2 = 5\}$, $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; e^x e^{2y} e^{-z} = 1\}$

Exercice :

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{ij} = e_n^{(i-1).(j-1)}$, où $e_n = \exp(2i\pi/n)$.
Déterminer A^2, puis en déduire dét(A).

(17)

Question de cours :

Soient f et g des applications linéaires de E, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Montrer que $rg(g \circ f) \leq \min(rg(f), rg(g))$, *avec pour h linéaire de E, rg(h) = dim (Im h).*

Exercice :

Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$. Montrer que A est inversible.

(18)

Question de cours :

Soit f une application linéaire de E, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, nilpotente : $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. Montrer qu'$\exists$ $a \in E \,/\, f^{p-1}(a) \neq 0$, que $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est libre, puis que $f^n = 0$.

Exercice :

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que $A = I_3 + 2J + 3J^2$, puis calculer $\forall k, n$ J^k, A^n.

(19)

Question de cours :

Soit E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et un sev de E, F = Vect (f_0, f_1, f_2), où $f_k : x \longmapsto x^k.e^x$.
Montrer que $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de F et déterminer la matrice de $d : f \longmapsto f'$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice :

Soient $A(x,y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / a_{ii} = x$ et $a_{ij \neq i} = y$, $K_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / k_{ij} = 1$. Exprimer $A^p(x,y)$ avec I_n et K_n, $p \in \mathbb{N}$.

(20)

Questions de cours : Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ev normés. Montrer que :
$G = \{f : E \to F\ ;\ \exists k \in \mathbb{R}_+ / \forall (x,y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E\}$ est un sev du $\mathbb{K}$ev $\mathcal{C}(E, F)$.

Exercices :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ non scalaire, montrer que $H_A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), AM = MA\}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, puis qu'une base de H_A est $\{I_2, A\}$. *Considérer pour $A = (a_{ij})$ les cas $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{12} \neq 0$ et $a_{21} \neq 0$.*
2. Soient A et B deux sev d'un $\mathbb{K}$ev E. Donner une CNS pour que A + B = A ∩ B.
3. On munit $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ d'une loi interne « ∗ » définie par $(x,y) * (x',y') = (xx', y + y')$ et d'une loi externe « **.** » dans $\mathbb{R}$ définie par $\alpha \,.\, (x, y) = (x^\alpha, \alpha y)$. Montrer que $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, *, .)$ est un $\mathbb{R}$ev.

(21)

Questions de cours :

Parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ 2x - 3y + z = 0\}$, $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ 2x - y + z = 5\}$, $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ xz = 0\}$,
$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x^2 - 3y^2 + z^2 = 5\}$, $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ e^x.e^{2y+5}.e^{-z} = 3\}$.
$E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ z.(x^2 + y^2) = 0\}$.

Exercice :

Soit f une application linéaire de E, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, telle que $\forall x \in E$ $(x, f(x))$ est lié.
Montrer que f est une homothétie vectorielle. *i.e. : $\exists \alpha \in \mathbb{K} / f(x) = \alpha.x$.*

. *Géométrie*

(22)

<u>*Question de cours*</u> :

Réduction de l'équation d'une courbe $\mathcal{C}$ du plan euclidien : $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.

<u>*Exercice*</u> :

Construire la courbe $\mathcal{C}$: { (x, y) ; $x = \frac{t^3}{3t+1}$; $y = \frac{3t^2}{3t+1}$, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-1}{3}\right\}$}.

(23)

<u>*Question de cours*</u> :

Donner l'équation en polaire d'une droite dans le plan (xOy).

Donner l'équation en polaire d'un cercle dans (xOy), puis celle d'un cercle passant par O.

<u>*Exercices*</u> :

1) Construire la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{7\theta}{6\theta-\pi}$.

2) Construire la courbe $\mathcal{C}$: { (x, y) ; $x = \frac{6t^2-2t+5}{t^2+4}$; $y = \frac{10(t+3)}{t^2+3t+4}$, pour $t \in \mathbb{R}$ }.

(24)

<u>*Question de cours*</u> :

Définition bifocale puis par foyer et directrice d'une conique.

<u>*Exercices*</u> :

1) Calculer la distance de deux droites $\mathcal{D}_1$ (A_1 , $\overrightarrow{U_1}$) et $\mathcal{D}_2$ (A_2 , $\overrightarrow{U_2}$).

2) Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ / $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ d'éq. $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$

3) Calculer $[\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}\ ,\ \overrightarrow{e_r}\ ,\ \overrightarrow{e_z}]$, où $\overrightarrow{e_r}$: vecteur unitaire radial en coordonnées sphériques.

(25)

<u>*Question de cours*</u> :

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient deux points A (– 3 ; 1), B (1 ; 3), donner les équations cartésiennes puis polaires de la droite (AB), du cercle $\mathcal{C}$ passant par O, A et B, puis de la tangente de $\mathcal{C}$ au point A.

<u>*Exercices*</u> :

1) Construire la courbe $\mathcal{C}$: { (x, y) ; x = 2.Arctan(t) ; $y = \ln\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)$, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ }.

2) Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ / $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ d'éq. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$

3) Calculer $[\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y}\ ,\ \overrightarrow{e_r}\ ,\ \overrightarrow{e_z}]$, où $\overrightarrow{e_r}$: vecteur unitaire radial en coordonnées sphériques.

. *Polynômes*

(26)

<u>*Question de cours*</u> :

$\forall$ n $\in \{1,2,\ldots,N\}$, $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que deg (P_{n+1}) > deg (P_n). Montrer que $\{P_n\}$ est libre.

<u>*Exercice*</u> :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_k(X) \in \mathbb{R}_n[X]$, $P_k(X) = X^k.(1 – X)^{n-k}$.
Montrer que $(P_k(X))_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ en exprimant X^p en fonction des $P_k(X)$.

(27)

<u>*Question de cours*</u> :

Soient $Q_i(X) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(X - a_j)$, pour $i \in \{1,2,\ldots,n+1\}$ avec les a_i réels distincts deux à deux
Montrer que la famille $\{Q_i(X)\}$ est libre.

<u>*Exercice*</u> :

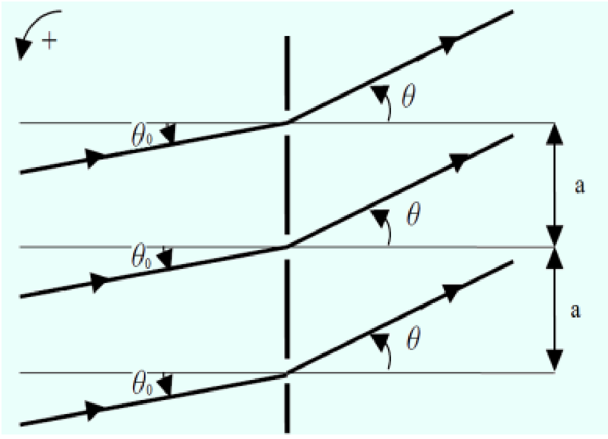
Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $P(X) – X$ divise $P(P(X)) – X$.
En déduire le reste de la division euclidienne de $X^4 + 4X^3 + 4X^2 – X – 2$ par $X^2 + X – 1$.

*Colles corrigées de physique – chimie en MP et PSI**

(1)

Cours : Définir la **différence de marche (ddm)**, les **surfaces d'onde** et rappeler le **théorème** de **Malus**.

Exercice : **Faisceau de lumière cohérente (I_0, λ)**



→ Lumière traversant un **réseau** de **N fentes fines**.

Déterminer la ddm δ puis le déphasage ϕ entre deux rayons passant par des fentes voisines directes en fonction de a, λ, θ_0 et θ.

On pourra poser u = $\frac{sin(\theta)-sin(\theta_0)}{\lambda}$.

En déduire l'amplitude complexe totale s pour une largeur des fentes : ε.

En déduire une expression et une représentation graphique de l'intensité lumineuse I(θ) sur un écran perpendiculaire et éloigné.

Rappel de mathématiques :

$\int_{-a}^{a} e^{jkx}dx = \frac{1}{jk}[e^{jka} - e^{-jka}]$ = *2a.sinc(ka).*

Correction (1)

Cours :

Différence de marche entre deux rayons : **δ** (différence de chemins optiques)
Surfaces d'onde : **surfaces** où tous les points sont dans un **même état vibratoire**.
À grande distance, une onde ***sphérique*** *(sphères) devient* ***quasi-plane*** *(plans).*
Théorème de **Malus** : les **rayons lumineux** sont **orthogonaux** en tout point aux **surfaces** d'**ondes**.
Ce théorème permet de calculer les différences de chemin optique et donc les déphasages de deux rayons.

Exercice : **Interférences et réseau**

Pour **u =** $\frac{\sin(\theta)-\sin(\theta_0)}{\lambda}$ et d'après la loi de Malus (rayons orthogonaux en tous points avec leur surface d'onde) →
Le déphasage entre deux rayons d'une même source passant par deux fentes voisines directes est ϕ = 2πua,
L'amplitude complexe totale de l'onde lumineuse diffractée par chacune des fentes est :
$\underline{s} = s_0.\left[\int_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2} \sum_{p=0}^{N-1} \exp(-j(2\pi ux + p\phi))\, dx\right]$. Donc, $\underline{\mathbf{s}} = \mathbf{s_0} \left[\int_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2} \exp(-j2\pi ux)dx\right] \frac{1-\exp(-jN\phi)}{1-\exp(-j\phi)}$.

→ $\mathbf{I(u) = I_0 sinc^2(u)R(u)}$, avec $\mathbf{R(u)} = \left[\frac{\sin(N\pi ua)}{N.\sin(\pi ua)}\right]^2$.

(2)

Cours : **Équation** de l'**hydrostatique** et **poussée** d'**Archimède**.

Exercice : **Atmosphère de la Terre** *($G = 6{,}67.10^{-11}$ SI, $R_T \approx 6400$ km, $M_T \approx 6.10^{24}$ kg, $T_{jour} = 86400$ s).*

Déterminer avec la gravitation newtonienne l'accélération de la pesanteur, g_0 au sol et g(z) à l'altitude z.
On rappelle la loi fondamentale de l'hydrostatique concernant le gradient de pression dans un fluide : $\vec{\nabla}\mathbf{P} = \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{g}}$.
Pour un modèle isotherme et en considérant l'accélération de la pesanteur constante, $g = g_0 = 10$ m.s^{-2},
montrer alors qu'à l'altitude z, la pression s'exprime : $\mathbf{P(z) = P_0\exp\left(-\frac{M_{air}g_0}{RT}z\right)}$.
Plus précisément, en considérant g(z) à la place de g_0, exprimer la pression **P(z)**.
Pour un modèle adiabatique en considérant $g = g_0$, montrer avec la relation de Laplace, $\mathbf{P\rho^{-\gamma} = cste}$, que :
$\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g_0 (\frac{P}{P_0})^{1/\gamma}$ et donc que la pression en fonction de l'altitude z s'exprime : $\mathbf{P(z) = [P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{1-\gamma}{\gamma}\rho_0 g P_0^{\frac{-1}{\gamma}}.z]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$.

Correction (2)

Cours

Équation de l'hydrostatique (Hy) : $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{f}}$ *($\vec{f}$: champ de l'espace).*
Soit pour un fluide immobile dans un champ de pesanteur, $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{g}}$.
et $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{f}}_\mathbf{i}$, pour un fluide soumis à des forces d'inerties $\vec{f}_i$.

Poussée d'Archimède : force qui s'applique au centre de poussée C d'un objet immergé dans un fluide. Elle est verticale, de bas en haut et due à la pression, avec son gradient, du fluide entourant le volume immergé de cet objet : (Hy) → $\vec{\boldsymbol{\pi}} = -\oiiint \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{fluide}}\vec{\mathbf{g}}\mathbf{dV}_{\mathbf{immergé}}$. Fluide uniforme, $\vec{\boldsymbol{\pi}} = -\,\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{fluide}}\mathbf{V}_{\mathbf{immergé}}\,\vec{\mathbf{g}}$.

Exercice **Atmosphère terrestre**

Accélération de la pesanteur : $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ au sol et $g(z) = \frac{GM_T}{(R_T+z)^2}$ à l'altitude z.

→ $\mathbf{g_0 \approx 9{,}8}$ **ms^{-2}** et $\mathbf{g(z) = g_0\left(\frac{R_T}{R_T+z}\right)^2}$ **: (Acc.p)**

D'après la **loi de l'hydrostatique**, $\mathbf{\frac{dP}{dz} = -\rho(z)\,g(z)}$ et $P(0) = P_0 = 1$ atm $= 10^5$ Pa.

. Modèle isotherme

Air : gaz parfait isotherme et pour $g(z) = g_0$ → $\mathbf{\rho(z) = \frac{PM_{air}}{RT}}$ → $\mathbf{P(z) = P_0\exp\left(-\frac{M_{air}g_0}{RT}z\right)}$

On vérifie pour $g(z) = g_0$, $P(0) = P_0$ et $\lim\limits_{z\to+\infty} P(z) = 0$.

→ $\boldsymbol{\rho}\mathbf{(z)} = \frac{M_{air}}{RT}\exp\left(-\frac{M_{air}g_0}{RT}z\right) = \mathbf{\rho_0\exp\left(-\frac{M_{air}g_0}{RT}z\right)}$.

En considérant (Ac.p) : $g(z) = \frac{g_0}{(1+z/R_T)^2}$, on obtient $\mathbf{P(z) = P_0\exp\left(\frac{M_{air}g_0R_T}{RT(1+z/R_T)} - \frac{M_{air}g_0R_T}{RT}\right)}$

On vérifie $P(0) = P_0$ et $\lim\limits_{z\to+\infty} P(z) = P_0\exp\left(-\frac{M_{air}g_0R_T}{RT}\right)$.

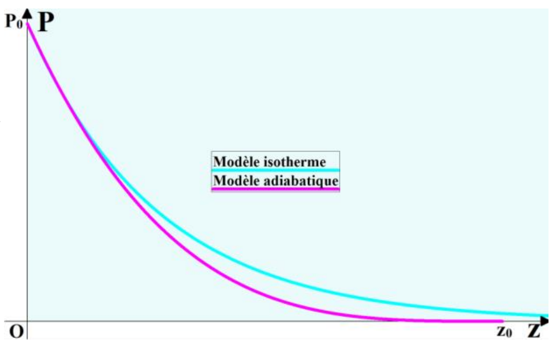
. Modèle adiabatique *pour $g(z) = g_0$.*

Loi de Laplace → $\mathbf{P\rho^{-\gamma} = cste}$ → $\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g_0(\frac{P}{P_0})^{1/\gamma}$ *. On prend $g(z) = g_0$.*

→ $\mathbf{P(z) = [P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{1-\gamma}{\gamma}\rho_0 g_0 P_0^{\frac{-1}{\gamma}}.z]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$ *qui s'annule en $z_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_0}{\rho_0 g_0}$.*

→ $\mathbf{\rho(z) = \rho_0[1 + \frac{1-\gamma}{\gamma}\rho_0 g_0 P_0^{-1}.z]^{\frac{1}{\gamma-1}}}$.

Avec $M_{air} = 29.10^{-3}$ kg.mol^{-1}, $\rho_0 = 1{,}2$ kg.m^{-3}, $g_0 = 10$ m.s^{-2}, $\gamma = 1{,}4$:



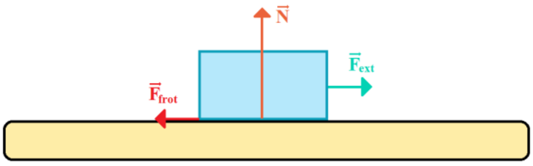
(3)

<u>Cours</u> **Types** d'**ondes mécaniques** avec **exemples**.

<u>Exercice</u> : **Frottements** $(\vec{F}_{frot})$ sur un objet parallélépipédique de masse m posé sur un plan (coefficients de frottement statique : $\mathbf{f_s}$ et dynamique : $\mathbf{f_d} < \mathbf{f_s}$).

Déterminer graphiquement $\mathbf{F_{frot}}$ en fonction de la force exercée $\mathbf{F_{ext}}$ dans un plan horizontal.

Déterminer la **condition** de **glissement** de l'objet sur un **plan incliné** dont on note $\boldsymbol{\alpha}$ l'angle par rapport à l'horizontale.



Correction (3)

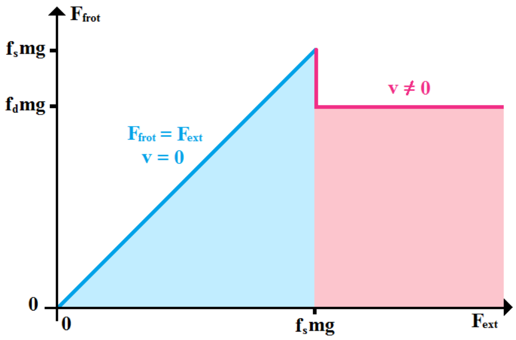
<u>Cours</u> **Types** d'**ondes mécaniques** avec **exemples**.

- **Transversale** si le déplacement des points du **milieu** de propagation s'effectue perpendiculairement à la direction de propagation.
  <u>Exemples</u> : ondes sismiques S, ondes électromagnétiques dans le vide.

- **Longitudinale** si le déplacement des points du **milieu** de propagation s'effectue dans la même direction que celle de la propagation.
  <u>Exemples</u> : ondes sismiques P, compression d'un gaz dans un tuyau, ondes sonores, compression et décompression d'un ressort.

<u>Exercice</u> : **Frottements** $(\vec{F}_{frot})$ d'un objet parallélépipédique sur un plan *(Cf. lois de Coulomb)*

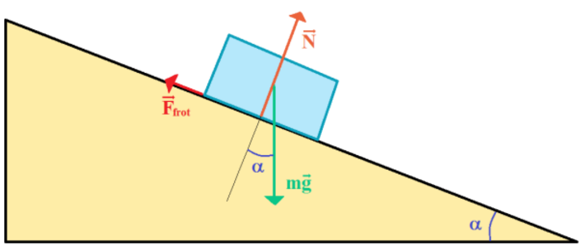
- **Représentation graphique** de $\mathbf{F_{frot}}$ en fonction de la valeur de la force exercée $\mathbf{F_{ext}}$ sur l'objet posé sur un **plan horizontal** ayant **N = mg** (projection verticale du PFD et $\mathbf{f_d} < \mathbf{f_s}$:



- **Plan incliné** *(Cf. PFD)*

  . Cas statique :
  N = mg.cos α et
  $F_{frot} = f_s N \geq mg.\sin\alpha$
  $\rightarrow \mathbf{\tan\alpha \leq f_s}$.

  . Cas dynamique :
  v = cste pour $\boldsymbol{\alpha}$
  tel que $\mathbf{\tan\alpha = f_d}$.



(4)

Cours : Tracer les caractéristiques d'un **amplificateur opérationnel réel et** d'un **amplificateur opérationnel idéal**.

Exercice : **Modélisation** d'une **ligne de transmission** *de longueur* ***d*** *en régime sinusoïdal (de pulsation* ***ω****).*

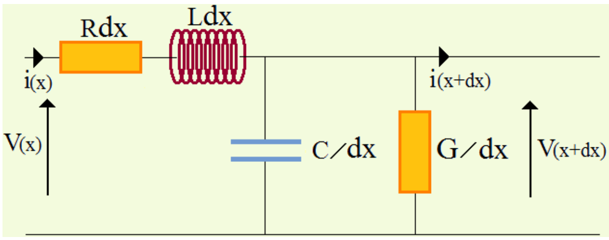
Montrer pour $x \in [0, d[$ que :

$\frac{dV}{dx} = -(R + jL\omega)\,i$ et $\frac{di}{dx} = -(G + jC\omega)\,V$, puis que :

$\frac{d^2V}{dx^2} = a^2V$ et $\frac{d^2i}{dx^2} = a^2 i$, puis $\mathbf{Z(x)} = \frac{\mathbf{V(x)}}{\mathbf{i(x)}} = \mathbf{Z_0}\,\frac{\mathbf{b - th(ax)}}{\mathbf{b.th(ax)-1}}$

et $\lim_{x \to +\infty} Z(x) = Z_0$. Déterminer $\mathbf{Z_0}$, **a** et **b**.

Montrer que, **sans pertes**, $\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}^2} = \mathbf{LC}\,\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \mathbf{t}^2}$: cela correspond à une **onde plane** progressant à une vitesse $\mathbf{v_\varphi}$ à déterminer.

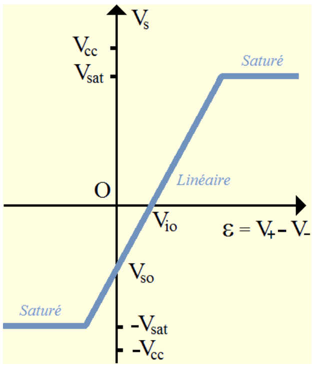


Elément infinitésimal entre x et x + dx de la ligne

Correction (4)

Cours : **Amplificateur opérationnel réel** :

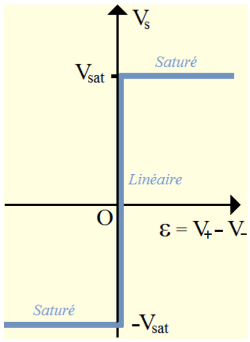
- **ε** : tension différentielle en entrée ($\varepsilon = V^+ - V^-$).
- **V**$_S$: tension de sortie (gain différentiel $A = V_S / \varepsilon$).
- $\pm\mathbf{V_{cc}}$: tensions d'alimentation.
- $\pm\mathbf{V_{sat}}$: tensions de saturation en sortie.
- $\mathbf{V_{io}}$: tension d'offset en entrée (ε lorsque $V_S = 0$).
- $\mathbf{V_{so}}$: tension d'offset en sortie (V_S lorsque $\varepsilon = 0$).
- **Slew rate** (vitesse de balayage) : pente maximale de $V_S(t)$ (en V/µs) : vitesse de variation maxi. en tension.



Amplificateur opérationnel idéal (**AOI**), ou **parfait** :

AO à gain différentiel infini *(on précise ∞ sur les schémas)* et avec les courants de polarisation, $\mathbf{i^+ = i^- = 0}$.

- Régime **linéaire** : $\mathbf{\varepsilon = 0}$, $\mathbf{V^+ = V^-}$.
- Régime **saturé** : - Pour $\mathbf{\varepsilon > 0}$, $\mathbf{V_s = +V_{sat}}$, - Pour $\mathbf{\varepsilon < 0}$, $\mathbf{V_s = -V_{sat}}$.



Exercice : ***Modélisation d'une ligne de transmission*** *de longueur* ***d*** *en régime sinusoïdal (de pulsation* ***ω****).*

Loi des mailles *en sinusoïdal* → **(1) :** $\begin{cases} \mathbf{V(x+dx) = V(x) - (R + jL\omega)dx.\,i(x)} \\ \mathbf{V(x+dx) = (i(x) - i(x+dx))/((G + jC\omega)dx)} \end{cases}$

$\rightarrow \frac{dV}{dx} = -(R + jL\omega)\,i$ et $\frac{di}{dx} = -(G + jC\omega)\,V$.

En posant $\mathbf{Z_0} = \left(\frac{\mathbf{R+jL\omega}}{\mathbf{G+jC\omega}}\right)^{\mathbf{1/2}}$, $\mathbf{a} = ((\mathbf{R + jL\omega})(\mathbf{G + jC\omega}))^{\mathbf{1/2}}$, $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{Z_0 th(ad) - Z(d)}}{\mathbf{Z_0 - Z(d) th(ad)}} \rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = a^2V$ et $\frac{d^2i}{dx^2} = a^2 i$

→ Avec les indices i : incident et r : rétrograde, $\mathbf{V(x) = V_i\, e^{-ax} + V_r\, e^{+ax}}$ et $\mathbf{i(x)} = \frac{\mathbf{V_i}}{\mathbf{Z_0}}\mathbf{e^{-ax}} - \frac{\mathbf{V_r}}{\mathbf{Z_0}}\mathbf{e^{+ax}}$

$\rightarrow \mathbf{Z(x)} = \frac{\mathbf{V(x)}}{\mathbf{i(x)}} = \mathbf{Z_0}\,\frac{\mathbf{b - th(ax)}}{\mathbf{b.th(ax)-1}}$, $\lim_{x \to +\infty} \mathbf{Z(x) = Z_0}$.

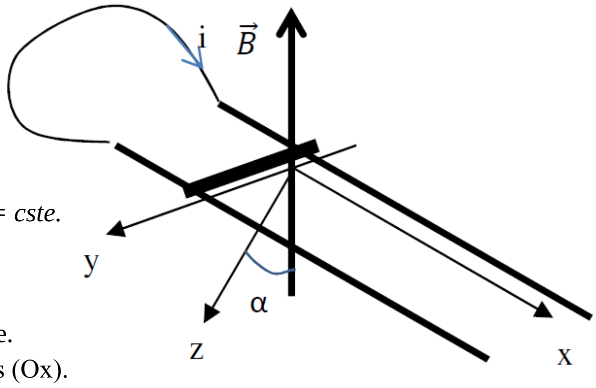
Sans pertes, $R = 0$, $G = 0 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -L\,\frac{\partial i}{\partial t}$ et $\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{C}\frac{\partial i}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}^2} = \mathbf{LC}\,\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \mathbf{t}^2}$

→ **Onde plane** progressant à la vitesse $\mathbf{v_\varphi} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{LC}}}$ → Milieu : $\varepsilon_0.\varepsilon_r = L.C / \mu_0$

Cf. Inductance d'un câble cylindrique et Condensateur cylindrique.

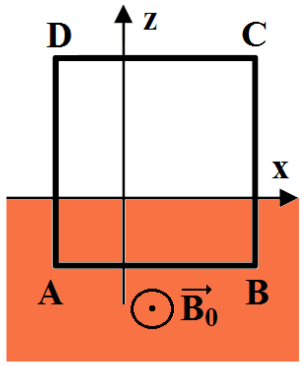
(5)

Exercices



1. Mouvement d'une **barre mobile** *(masse m)* sur **rails** de **Laplace**.
Les rails parallèles à (Ox) incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal sont distants de L. La barre reste parallèle à tout instant à (Oy) et se déplace suivant (Ox). $\vec{B}$ et (Oz), axe vertical, sont tels que $(\widehat{\vec{B},(Oz)}) = \alpha$ = cste.

Déterminer le flux du circuit (barre + rails), Φ(t). En déduire une relation entre l'intensité du courant i circulant dans la barre et les rails avec $\dot{x}(t)$ pour une résistance R du circuit. Déterminer la force de Laplace sur la barre. Exprimer le PFD de la barre puis le projeter suivant l'axe parallèle aux rails (Ox). En déduire une expression de la vitesse de la barre v(t), puis celle de x(t). Déterminer $\lim_{t\to+\infty} v(t)$.



2. Cadre métallique ABCD de résistance électrique **R** et masse **m tombant** dans le plan xOz où dans la **zone z < 0** existe un **champ magnétique constant** $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_y$.
Données : AB = CD = a, AD = BC = b. (Oz) : axe vertical ascendant.

Déterminer le flux magnétique Φ du cadre puis sa fem induite, e. Vérifier la loi de Lenz. Exprimer avec le PFD la loi du mouvement de translation (centre d'inertie G de ABCD en z) du cadre pour $-z_A < b$ puis pour $-z_A > b$. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} \dot{z}(t)$.
Mêmes questions pour un cadre circulaire (spire) de rayon a tombant dans le plan xOz où dans la zone z < 0 existe un champ magnétique constant $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_y$.

Correction (5)

Exercices

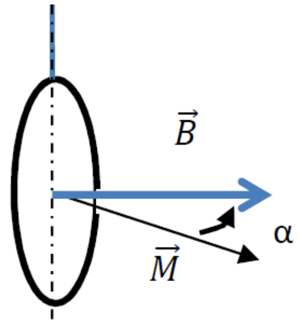
1. Le flux est $\mathbf{\Phi(t) = \vec{B}.\vec{S}(t) = -B.S(t).\cos\alpha}$, avec l'aire délimitée par la barre et les rails, $\mathbf{S(t) = S(0) + L \times x(t)}$.
→ La fém induite à l'instant t, $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = L.B.\cos\alpha.\dot{x}(t)$, génère, dans le circuit de résistance ohmique R, un courant d'intensité $i(t) = e(t)/R = (L.B.\cos\alpha/R).\dot{x}$ et la barre est ainsi soumise à la force de Laplace due au champ magnétique $\vec{B}$: $\vec{F} = i(t)L\vec{u}_y \times \vec{B} = i(t)L\vec{u}_y \times B(-\sin\alpha\,\vec{u}_x - \cos\alpha\,\vec{u}_z) = \mathbf{(L^2.B^2.\cos\alpha/R).\dot{x}(\sin\alpha\,\vec{u}_z - \cos\alpha\,\vec{u}_x)}$.
→ Le PFD de la barre, de masse m, projeté dans la direction (Ox) dans laquelle elle se déplace s'écrit :
$m\ddot{x} = mg.\sin\alpha - (L^2.B^2.\cos^2\alpha/R)\dot{x}$. Soit : $\ddot{x} + (L^2.B^2.\cos^2\alpha/mR)\dot{x} - g\sin\alpha = 0 \rightarrow \mathbf{\dot{x}(t) = v_\infty(1 - \exp(-t/\tau))}$,
avec $\mathbf{\tau = mR/L^2B^2.\cos^2\alpha}$ et, calculée pour $\ddot{x} = 0$ en $t \rightarrow +\infty$, $\mathbf{v_\infty = mgR.\sin\alpha/L^2B^2.\cos^2\alpha}$.

2. En orientant le contour du cadre plongé dans le champ magnétique de sorte que $\vec{S}$ ait le même sens que $\vec{B}$, on obtient un flux positif pour un sens positif de (Oy) : $\mathbf{\Phi(t) = \vec{B}.\vec{S}(t) = B_0.a.z(t)}$.
→ La fém induite à l'instant t, $\mathbf{e(t)} = -\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{-B_0.a.\dot{z}(t)}$, génère, dans le cadre de résistance ohmique R, un courant d'intensité $i(t) = e(t)/R = (-B_0.a/R).\dot{z}(t)$ et le cadre est ainsi soumise à la force de Laplace due au champ magnétique $\vec{B}$: $\vec{F} = i(t)\overrightarrow{AB} \times \vec{B} = \mathbf{(-a^2B_0{}^2/R).\dot{z}\vec{u}_z}$
→ Le PFD de la barre, de masse m, projeté dans la direction (Ox) dans laquelle elle se déplace s'écrit :
$m\ddot{z} = mg - (a^2B_0{}^2/R)\dot{z}$. Soit : $\ddot{z} + (a^2B_0{}^2/mR)\dot{z} - g = 0$. On résoud : $\mathbf{\dot{z}(t) = v_\infty(1 - \exp(-t/\tau))}$,
avec $\mathbf{\tau = mR/a^2B_0{}^2}$ et, calculée pour $\ddot{x} = 0$ en $t \rightarrow +\infty$, $\mathbf{v_\infty = mgR/a^2B_0{}^2}$.
Le cadre plonge donc avec cette équation du mouvement tant que S(t) varie. Lorsqu'il est en totalité plongé dans le champ magnétique uniforme et constant, Φ(t) devient constant et donc e(t) = 0. → i(t) = 0, $\ddot{z} = g$: **chute libre**.

Pour un cadre circulaire de rayon a, l'aire à t est $S(t) = a^2\alpha(t) - a^2\cos\alpha(t)\sin\alpha(t) = a^2(\alpha(t) - \sin 2\alpha(t)/2)$.
La force de Laplace $d\vec{F}$ pour un élément $[\theta(t);\ \theta(t) + d\theta(t)]$ due au champ magnétique $\vec{B}$ est **radiale**. En intégrant $d\vec{F}$ sur $[-\alpha(t);\ +\alpha(t)]$ la résultante est donc également dirigée selon (Oz) et opposée au poids de la spire (freinage).

(6)

. <u>Cours</u> **Circulation magnétique** et **théorème** d'**Ampère**.



. <u>Exercice</u> **Spire circulaire** de rayon R et vecteur orthogonal $\vec{n}$, tournant suivant l'axe vertical (Oz) et plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{u}_x$. $\alpha = (\widehat{\vec{u}_x, \vec{n}})$.

Déterminer le **flux magnétique Φ** à travers la spire puis la **fém e** générée et l'intensité **i** du courant induit sachant que la spire a une résistance R. En déduire le moment magnétique $\vec{M}$.
Exprimer le théorème du moment cinétique (TMC) pour la spire qui a pour moment dynamique, $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$, puis sa projection sur l'axe vertical (Oz) . Déterminer le moment d'inertie J de la spire.
Résoudre (TMC) en déterminant une équation avec α(t).
En déduire l'évolution du mouvement de la spire.

Correction (6)

<u>Cours</u> **Circulation magnétique**. Le théorème de **Stokes** s'écrit pour $\vec{B}$, $\oint_C \vec{\mathbf{B}}\mathbf{d}\vec{\mathbf{l}} = \iint_S \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{\mathbf{B}}.\mathbf{d}\vec{\mathbf{S}}$ *(avec C entourant S)*.
L'équation de Maxwell – Ampère implique alors pour la circulation de $\vec{B}$ le long de C :
$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \iint_S \mu_0 \left(\vec{\mathbf{j}} + \boldsymbol{\varepsilon_0}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}^2}\right)\mathbf{d}\vec{\mathbf{S}}$. **Le théorème d'Ampère** s'écrit en négligeant le terme dû à $\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.d\vec{S}$ par rapport à celui dû à $\vec{j}.d\vec{S}$: $\oint_C \vec{\mathbf{B}}\mathbf{d}\vec{\mathbf{l}} = \boldsymbol{\mu_0}\mathbf{I}_{\textbf{intérieur à C}}$ (∀ C fermée).

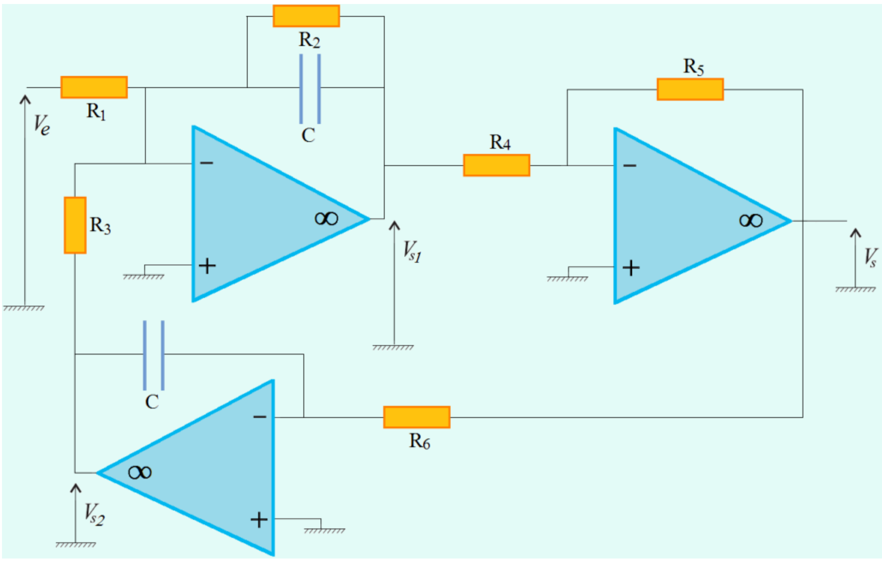
<u>Exercice</u>

Le flux est $\mathbf{\Phi(t)} = \vec{\mathbf{B}}.\vec{\mathbf{S}} = \mathbf{BS\cos\alpha(t)}$, avec $S = \pi a^2$, l'aire de la spire et α(t), l'angle de sa rotation autour de (Oz).
→ La fém induite à l'instant t, $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -B.S.\dot{\alpha}.\sin\alpha$, génère, dans le circuit de résistance ohmique R, un courant d'intensité $i(t) = e(t)/R = -(B.S.\sin\alpha/R).\dot{\alpha}$.
La spire possède ainsi un moment magnétique, $\vec{M} = i(t).S.\vec{n} = -(B.S^2.\sin\alpha/R).\dot{\alpha}.\vec{n}$ et la résultante des forces étant nulle, elle est soumise au couple $\vec{\Gamma} = \vec{M} \times \vec{B} = -(B^2S^2.\sin^2\alpha/R).\dot{\alpha}.\vec{u}_z$.
Le théorème du moment cinétique suivant l'axe de rotation de la spire (Oz) s'écrit donc $\mathbf{J\ddot{\alpha}} = -(\mathbf{B^2S^2\sin^2\alpha/R})\boldsymbol{\dot{\alpha}}$, où le moment d'inertie J de la spire est celui d'un cercle de masse m et de rayon a : $\mathbf{J = ma^2}$.
Soit $\mathbf{J\ddot{\alpha}} = -\mathbf{B^2S^2\,\dot{\alpha}(1-\cos 2\alpha)/2R}$. En intégrant entre 0 et t : $\mathbf{J\dot{\alpha}} = -\mathbf{B^2S^2\,(2\alpha - \sin 2\alpha)/4R + Cste_1}$.
Ainsi, $\boldsymbol{\dot{\alpha}}$ **évolue** de $\boldsymbol{\dot{\alpha}}(\mathbf{0}) = -\mathbf{B^2S^2\,(2\alpha(0) - \sin 2\alpha(0))/4R + Cste_1}$ à $\mathbf{t = 0}$ jusqu'à son **immobilisation** et de son **changement** de **sens** de **rotation**, à l'instant $t = t_0$ pour lequel $\boldsymbol{\dot{\alpha}}(\mathbf{t_0}) = \mathbf{0}$, donc en $\boldsymbol{\alpha_0}$ tel que :
$2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0 = 4R.Cste/B^2S^2$ *(détermination graphique)*.
On peut calculer $\mathbf{t_0} = \int_0^{t_0} dt = (-\mathbf{4RJ/B^2S^2})\ \int_0^{\alpha_0} \mathbf{d\alpha/(2\alpha - \sin 2\alpha - (4RJ/B^2S^2)Cste)}$.
Dans l'équation du mouvement de rotation, le changement de signe de $\dot{\alpha}$ entraine celui de $\ddot{\alpha}$. La spire s'immobilisera donc à nouveau avec changement de sens de rotation en α_1 tel que $B^2S^2\,(2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1)/4R = Cste_2$ où $Cste_2$ est déterminée avec les conditions initiales en $t = t_0$, $\alpha(t_0) = \alpha_0$ et $\dot{\alpha}(t_0) = 0$, ...

(7)

Cours Schémas de montages d'AOI : **suiveur** et **amplificateur – inverseur**.

Exercice **Circuit** d'**AOI**



Déterminer en régime sinusoïdal,

$\underline{\mathbf{H}} = \dfrac{\underline{\mathbf{V_s}}}{\underline{\mathbf{V_e}}}$, puis la bande passante

$\boldsymbol{\Delta\omega} = \dfrac{\boldsymbol{\omega_0}}{\mathbf{Q}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_2C}}$

Vérifier que la décomposition en série de Fourier d'un signal d'entrée $\mathbf{V_e}$ **alternatif rectangulaire** de période T_e est :

$\mathbf{V_e(t) = \sum A_k \sin(k\omega_e t) + \sum B_k \cos(k\omega_e t)}$,

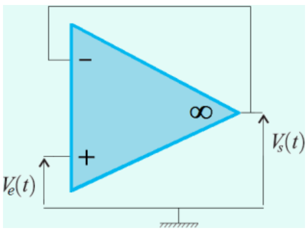
Ayant $\mathbf{A_k} = \frac{2}{T_e}\int_0^{T_e} V_e(t)\sin(k\omega_e t)dt$,

montrer que $\mathbf{A_k} = \mathbf{\frac{2E}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right)}$ et $\mathbf{B_k = 0}$.

En déduire une expression de $\underline{\mathbf{V_s}}$.

Correction (7)

Cours **Suiveur**

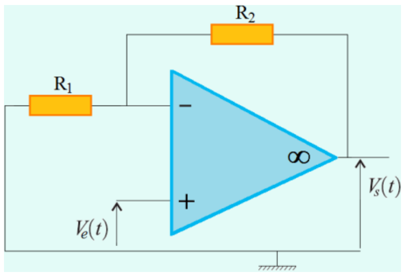


$\mathbf{V_s(t) = V_e(t)}$

Utile pour prélever une tension sans la perturber (courant d'entrée nul).

Amplificateur inverseur

$\mathbf{V_s(t) = -\frac{R_2}{R_1}V_e(t)}$



Exercice **Circuit** d'**AOI**

$$V_S = \frac{-R_5}{R_4}V_{S1} = -R_6C\frac{dV_{S2}}{dt} \text{ et } \frac{R_2}{R_1}V_e + \frac{R_2}{R_3}V_{S2} = -\left(V_{S1} + R_2C\frac{dV_{S1}}{dt}\right)$$

$\longrightarrow$ En régime sinusoïdal, $\underline{\mathbf{H}} = \dfrac{\underline{\mathbf{V_s}}}{\underline{\mathbf{V_e}}} = \dfrac{\mathbf{H_0}}{\mathbf{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$,

avec $H_0 = \frac{R_2R_5}{R_1R_4}$, $\omega_0 = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{R_5}{R_3R_4R_6}}$, $Q = R_2C\omega_0 = R_2\sqrt{\frac{R_5}{R_3R_4R_6}}$

$\longrightarrow |\underline{H}|(\omega_1) = |\underline{H}|(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}|\underline{H}|(\omega_0) \longrightarrow$ **Bande passante** : $\boldsymbol{\Delta\omega} = \dfrac{\boldsymbol{\omega_0}}{\mathbf{Q}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_2C}}$

$\longrightarrow$ On peut décomposer en série de Fourier un signal d'entrée V_e alternatif rectangulaire de période T_e :

$V_e(t) = \sum A_k \sin(k\omega_e t) + \sum B_k \cos(k\omega_e t)$, avec

$$A_k = \frac{2}{T_e}\int_0^{T_e} V_e(t)\sin(k\omega_e t) = \frac{2E}{T_e}\int_0^{T_e/2} V_e(t)\sin(k\omega_e t) + \frac{2}{T_e}\int_{T_e/2}^{T_e} V_e(t)\sin(k\omega_e t).$$

$\longrightarrow \mathbf{A_k} = \mathbf{\frac{2E}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right)}$ et $\mathbf{B_k = 0}$ avec V_e impair.

$\longrightarrow \mathbf{V_e(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4E}{\pi(2p+1)} \sin((2p+1)\omega_e t)}$

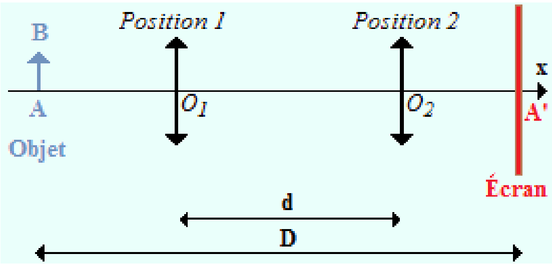
$\longrightarrow \underline{\mathbf{V_s}} \approx \sum_{p\in\Delta_p} \mathbf{\frac{4E}{2j\pi(2p+1)}\underline{H}(j(2p+1)\omega_e)\left(e^{j(2p+1)\omega_e t} - e^{-j(2p+1)\omega_e t}\right)}$

$\Delta_p = \{p \in \mathbb{N}$ *tels que* $(2p+1)\omega_e \in [\omega_1, \omega_2]\}$ *correspond aux harmoniques que laisse passer le filtre.*

(8)

Cours **Interféromètre** de **Michelson**. Décrire les **configurations** en **lame d'air** et en **coin d'air**.
Préciser les **différences** entre une figure obtenue sur un écran perpendiculaire à un rayon laser source traversant des **fentes** d'**Young** et celle obtenue pour le même rayon laser traversant des **trous** d'**Young**.

Exercice **Méthode** de **Bessel** en optique géométrique.

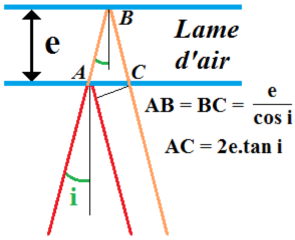


Pour deux positions O_1 et O_2 d'une lentille mince convergente, des images exactes de A sont observées sur l'écran en A'.
On pose $x = \overline{OA}$, $x' = \overline{OA'}$, $x_1 = \overline{O_1A}$, $x_2 = \overline{O_2A}$ et on fixe $D = \overline{AA'} = x' - x$.
Exprimer la relation de conjugaison de Descartes : 1 / x' – 1 / x = 1 / f'.
Déterminer $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, puis la focale image f'. Exprimer les grandissements $\mathbf{G_{t1}}$ et $\mathbf{G_{t2}}$ pour les positions O_1 et O_2. Montrer que $\mathbf{G_{t1} \times G_{t2} = 1}$.
Montrer que pour une lentille dans le plan médiateur de [A, A'], on obtient **D = 4 × f'** *(méthode de Silberman)*.

Correction (8)

Cours

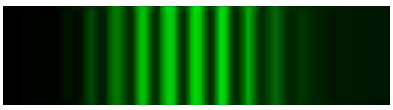
Configurations avec les miroirs M_1 (mobile) et M_2 :

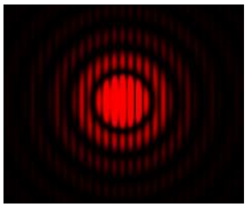


. En **lame d'air**, si M_1 et M_2 sont rigoureusement orthogonaux, la différence de marche (ddm) provient de la translation de M_1.
Pour une lame d'air d'épaisseur e, la ddm entre les deux rayons qui sont parallèles est : $\delta = AB + BC - AC.\sin i \rightarrow \boldsymbol{\delta} = \frac{2e}{\cos i} - 2e.\tan i .\sin i = \mathbf{2e.\cos i}$.
. En **coin d'air**, si le miroir M_2 est légèrement incliné. Les franges obtenues sont des parties de branches d'hyperboles qui apparaissent rectilignes sur l'écran.

Différences sur un écran : **fentes d'Young – trous d'Young**

Etendue de la figure de franges suivant la petite dimension des fentes. Et étendue des franges suivant une direction // à celle reliant les trous modulés par des anneaux concentriques.





Exercice ***Méthode de Bessel*** *en optique géométrique.*

Relation de conjugaison de **Descartes** : **f'/p' – f'/p = 1**, avec $p = \overline{OA}$, $p' = \overline{OA'}$.

$\rightarrow D + x = x' = \dfrac{x \times f'}{x + f'} \rightarrow x^2 + D \times\ x + f' \times D = 0$

→ Les deux solutions, si D > 4f', sont : $\mathbf{x_{1,2} = (-D \pm \sqrt{D^2 - 4Df'}\,)/2}$.

Avec $d = \overline{O_1O_2} = x_2 - x_1 = \sqrt{D^2 - 4Df'}$, on obtient $\mathbf{f' = \dfrac{D^2 - d^2}{4D}}$.

Pour i = 1, 2, $\mathbf{G_{t\,i}} = \dfrac{\overline{A_i'B_i'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{O_iA'}}{\overline{O_iA}} = \mathbf{\dfrac{D+x_i}{x_i}} \rightarrow \mathbf{G_{t1} \times G_{t2} = 1}$.

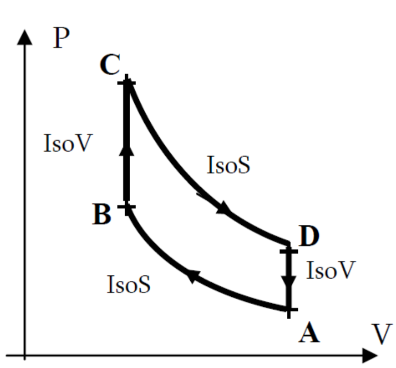
Méthode de **Silbermann** : lentille dans le plan médiateur de [A, A'] → d = 0 → **D = 4f '**.

(9)

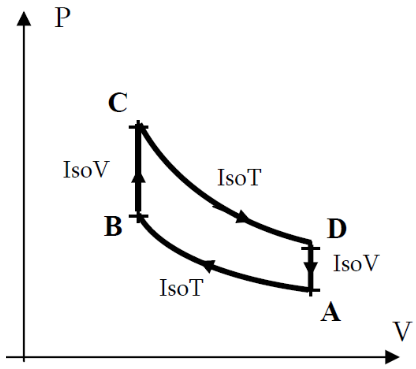
Cours **Deuxième principe** de la **thermodynamique**.

Exercice

En considérant les diagrammes, pour des gaz supposés parfaits, déterminer le rendement $\boldsymbol{\eta_{BdR}}$ pour le moteur avec cycle de **Beau de Rochas (BdR)** et le rendement $\boldsymbol{\eta_{Str}}$ pour le moteur avec cycle de **Stirling (Str)**.



(BdR)



(Str)

Correction (9)

Cours **2ème principe** : Pour un système Sys fermé, il existe une **fonction d'état**, **S** : **entropie** de Sys, extensive et non conservative telle que : $\mathbf{\Delta S = S_{échangée} + S_{produite}} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \mathbf{S_{produite}}$

- $\mathbf{S_{échangée} = 0}$ pour une transformation **adiabatique**, $S_{échangée} > 0$ pour une chaleur reçue par Sys et $S_{échangée} < 0$ pour une chaleur fournie par Sys.
- $\mathbf{S_{produite} = 0}$ pour une transformation **réversible**, $\mathbf{S_{produite} > 0}$ **sinon**.

→ *Une transformation est **adiabatique réversible** ⇒ elle est **isentropique**.*

Exercice

. Moteur avec cycle de **Beau de Rochas (BdR)**.

D'après le **1er principe**, pour un cycle, $\Delta_{Cycle}U = 0 \rightarrow \mathbf{Q_c + Q_f + W = 0}$.
Pour la chaleur échangée avec la source chaude (transformation isochore), $Q_c = Q_{BC} = C_V\,(T_C - T_B)$.
Pour la chaleur échangée avec la source froide (transformation isochore), $Q_f = Q_{DA} = C_V\,(T_C - T_B)$.
→ Rendement : $\eta_{BdR} = -W/Q_c = 1 + Q_f/Q_c = 1 + (T_A - T_D)/(T_C - T_B)$ avec d'après les lois de Laplace, $T_B = T_A.\alpha^{\gamma-1}$ et $T_C = T_D.\alpha^{\gamma-1}$, où $\alpha = V_A/V_B$ et $\gamma \approx 1{,}4$ pour l'air constitué essentiellement de molécules diatomiques (N_2 et O_2). → On obtient : $\boldsymbol{\eta_{BdR} = 1 - \alpha^{1-\gamma}}$.
Pour $\alpha = 10$, $\eta_{BdR} \approx 60\%$: en fait rendement maximal, ce cas représente le moteur idéal à explosion et à 4 temps.

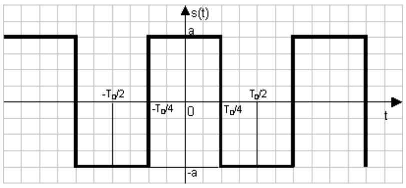
Moteur avec cycle de **Stirling (Str)**.

On pose $\alpha = V_A/V_B = V_D/V_C$ et on détermine travail et chaleur échangée pour chaque transformation du cycle :
Transformation A – B : isotherme → $W_{AB} = -\int_A^B PdV = -\int_A^B nRT_A dV/V = nRT_A \ln\alpha$, chaleur : $Q_{AB} = -W_{AB}$.
Transformation C – D : isotherme → $W_{CD} = -\int_C^D PdV = -\int_C^D nRT_C dV/V = nRT_C \ln\alpha$, chaleur : $Q_{CD} = -W_{CD}$.
Transformation B – C et D – A : isochores → $W_{BC} = W_{DA} = 0$, chaleurs : $Q_{BC} = C_V(T_C - T_B)$, $Q_{DA} = C_V(T_A - T_D)$.
$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$. → Rendement : $\boldsymbol{\eta_{Str}} = -W/Q_c = \mathbf{nR(T_C - T_A)\ln\alpha/(C_V(T_C - T_A) + nRT_C \ln\alpha)}$.
Pour $\alpha = 10$, $\gamma \approx 1{,}4$, $T_A = 300$ K et $T_C = 1000$ K → $\eta_{Str} \approx 40\%$: rendement maximal de ce moteur théorique.

(10)

Cours Déterminer avec des **AOI** les montages suivants : **sommateur inverseur**, **dérivateur**, **intégrateur**.

Exercice **Signaux**

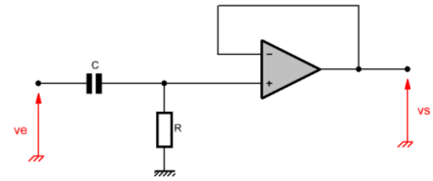


Décomposer en série de Fourier le signal informatif (en entrée) ci-contre et avec :

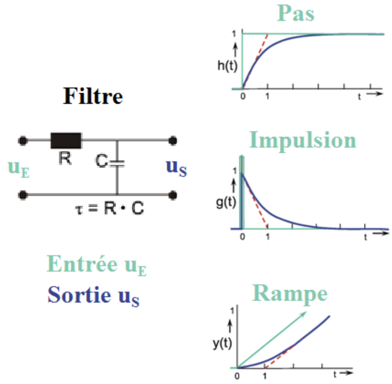
Coefficients réels : $a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega t\, dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega t\, dt$

Th. de Dirichlet pour f continue : $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos n\omega t + b_n \sin n\omega t.$

Déterminer la nature de ce 1[er] filtre de composants R = 2 kΩ et C = 0,5 µF.
Tracer son diagramme de Bode en amplitude.
Sachant que T_0 = 300 ms exprimer les harmoniques en sortie du filtre.



Déterminer la nature et l'ordre de ce 2[ème] filtre.
Aux signaux d'entrée (u_E) respectifs :
pas d'amplitude 1, impulsion et rampe $u_E(t)$ = a.t + b,
exprimer les signaux en sortie (u_S) : h(t), g(t) et y(t).

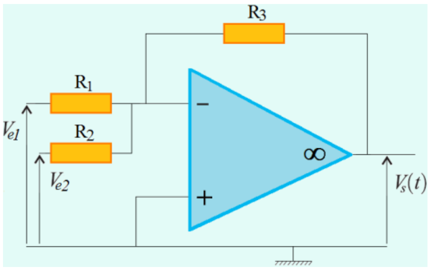


Correction (10)

Cours

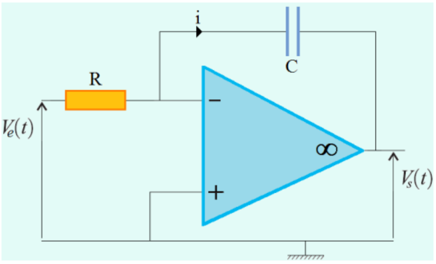
Sommateur inverseur

$$\mathbf{V_s(t) = -R_3\left(\frac{V_{e1}}{R_1} + \frac{V_{e2}}{R_2}\right)}$$



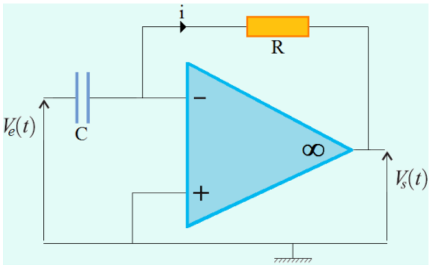
Intégrateur

$$\mathbf{V_s(t) = -\frac{1}{RC}\int V_e(t)\, dt}$$



Dérivateur

$$\mathbf{V_s(t) = -RC\frac{dV_e}{dt}}$$



Exercice **Signaux**

$a_n = -8/\pi^2 n^2$, $b_n = 0 \rightarrow$ $\mathbf{\underline{V_e}(t) = -(8/\pi^2)\sum_{n=0}^{+\infty} \cos n\omega t \;/(2n+1)^2}$.

Ce premier filtre est un **filtre passe-haut** car $Z = \underline{V_s}/\underline{V_e} = R/(R + 1/jC\omega) = jRC\omega/(1 + jRC\omega)$.

Le filtre ne laisse passer le signal que pour ω > 0,1 / RC ≈ 100 rad.s^{-1}, soit **f > 15 Hz**. Sur le diagramme de Bode, l'asymptote de 20log|Z| croit de 20 dB/décade pour ω < 100 rad.s^{-1} et est constante (valant 0) pour ω > 100 rad.s^{-1}
Les harmoniques du signal de sortie qui passent sont telles que nω = n × 2π / 300.10^{-3} > 100, soit **n > 5** environ.

Ce deuxième filtre est un **filtre passe-bas** car ici $Z = \underline{V_s}/\underline{V_e} = (1/jC\omega)/(R + 1/jC\omega) = 1/(1 + jRC\omega)$.

→ Avec **τ = RC** , $(1 + j\tau\omega)\underline{V_s} = \underline{V_e}$ et comme jω ↔ d/dt , $\mathbf{u_S(t) + \tau\frac{du_S}{dt} = u_E(t)}$. On obtient donc :

. Pas d'amplitude 1 en entrée ($u_E(t) = 0$ si t < 0 et $u_E(t) = 1$ si t > 0) → $\mathbf{u_S(t) = 1 - e^{-t/\tau}}$, si t > 0.

. Impulsion de Dirac en entrée → $\mathbf{u_S(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}}$, si t > 0.

. Rampe en entrée ($u_E(t) = 0$ si t < 0 et $u_E(t)$ = a.t + b si t > 0) → $\mathbf{u_S(t) = at + b - \tau a + (\tau^2 a - \tau b)e^{-t/\tau}}$, si t > 0.

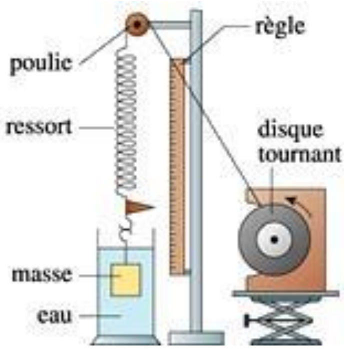
(11)

Exercices

1. Bille roulant sans frottements **dans un cerceau tournant** suivant son diamètre vertical.

Soit une bille (considérée ponctuelle) de masse m, roulant sans frottements dans un cerceau tournant suivant l'axe de son diamètre vertical à la vitesse de rotation ω. Dans le cerceau, cercle de rayon R, la bille est repérée par l'angle θ (θ = 0 pour le point du cerceau en contact avec le sol).

Déterminer dans un référentiel tournant lié au cerceau la force d'inertie $\vec{f}_{ie}$ puis l'énergie potentielle $E_{p,ie}$ associée.
En déduire les positions d'équilibre de la bille en précisant leur stabilité.
Déterminer et résoudre l'équation différentielle que résoud θ, angle de petites oscillations au voisinage de θ = 0.
Tracer la courbe représentant la période T de ces petites oscillations en fonction de ω.



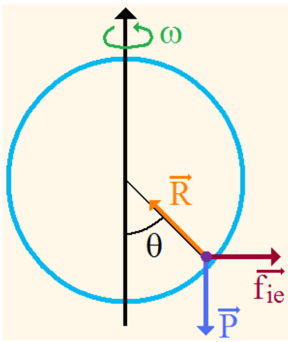
2. Oscillations forcées d'une masse par un disque tournant mu par un moteur.

En **négligeant** les **frottements** de l'**eau**, la **résonance** correspond à la **période** du **disque tournant**. En **considérant** les **frottements** avec une force $-\lambda\vec{v}$, pour une **pulsation** de rotation du disque, **ω**, écrire le PFD de la masse suivant (Oz).
avec un disque tournant imposant une écriture de z(t) sous la forme
$\mathbf{z(t) = z_0 \times \sin(\omega t)}$. Résoudre sous la forme complexe
$\mathbf{z(t) = z_0 \times \exp(j\omega t)}$ le **PFD** précédent et **déterminer** la **résonance.**

Correction (11)

Exercices

1. ***Bille*** *roulant sans frottements* ***dans un cerceau tournant*** *suivant son diamètre vertical.*



Distance de la bille à l'axe : r =R.sin θ. Dans le référentiel tournant en cylindriques,

$\vec{f}_{ie} = mr\omega^2\vec{u_r} = -\frac{dE_{p.e}}{dr}\vec{u_r} \rightarrow E_{p.e} = -\frac{mR^2\omega^2}{2}\sin^2\theta \rightarrow E_p(\theta) = mgR(1-\cos\theta) - \frac{mR^2\omega^2}{2}\sin^2\theta.$

Positions d'**équilibre**, $\mathbf{\frac{dE_p}{d\theta} = 0}$: $\mathbf{\sin\theta = 0}$ ou $\mathbf{\cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}}$

- **stables**, $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0$: $\mathbf{\theta = \theta_e = Arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)}$ ou $\mathbf{(\theta = 0 \text{ et } \omega < \sqrt{\frac{g}{R}})}$.

- **instables**, $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} < 0$: $\mathbf{\theta = \pi}$ **ou** $\mathbf{(\theta = 0 \text{ et } \omega > \sqrt{\frac{g}{R}})}$.

D'après le théorème de l'énergie mécanique, $\mathbf{\frac{m}{2}(R\dot{\theta})^2 + E_p(\theta) = cste}$.

→ **Oscillations** au **voisinage de θ = 0** : $\dot{\theta}^2 + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\theta^2 = cste$ → En dérivant, $\dot{\theta} = 0$ ou $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\theta = 0$.

→ Pour $\mathbf{\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}}$, la **période** de ces oscillations est $\mathbf{T = 2\pi / \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}}$.

2. ***Oscillations forcées*** d'une masse par un disque tournant mu par un moteur.

En **négligeant** les **frottements** de l'**eau**, la **résonance** correspond à la **période** du **disque tournant**. En considérant les **frottements** avec une force $-\lambda\vec{v}$, pour une **pulsation** de rotation du disque, **ω**, le **PFD** de la masse suivant (Oz) est : $\mathbf{m\ddot{z} - \lambda\dot{z} + kz = X_0 \times \sin(\omega t + \varphi)}$ avec un disque tournant imposant une écriture de z(t) sous la forme $\mathbf{z(t) = z_0 \times \sin(\omega t)}$. En utilisant alors la forme complexe $\mathbf{z(t) = z_0 \times \exp(j\omega t)}$, le **PFD** précédent devient :

$\mathbf{(-m\omega^2 - \lambda j\omega + k)z_0 = X_0\exp(j\varphi)}$ → L'amplitude est : $|\mathbf{z_0}| = \frac{|\mathbf{X_0}|}{|\mathbf{k - m\omega^2 - j\lambda\omega}|} = \frac{|\mathbf{X_0}|}{\sqrt{(\mathbf{k - m\omega^2})^2 + (\lambda\omega)^2}}$

→ **Résonance si** $\mathbf{k \geq \frac{\lambda^2}{2m}}$ en $\mathbf{\omega = \omega_0}$ qui minimise le dénominateur : $\mathbf{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{2m^2}}}$.

(12)

Exercice **Dipôle électrique**. Soit une charge – q en A et une charge + q en A'.
On note $\vec{a} = \overrightarrow{A'A}$, $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{r'} = \overrightarrow{A'M} = \vec{a} + \vec{r}$, O = m[A', A], $\vec{p} = q\vec{a}$. *Rappel : en sphériques,* $\vec{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial r}\ ;\ \frac{\partial}{r\partial\theta}\ ;\ \frac{\partial}{r.sin\theta.\partial\varphi}\right)$.

. Exprimer le **potentiel** en M dû à ce **dipôle**, **V(M)** en fonction de r, r', puis en fonction de a, r, $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right)$.
En un point éloigné M par rapport aux dimensions du dipôle, montrer que $\mathbf{V(M) \approx qacos\,\theta/4\pi\varepsilon_0 r^2}$.
En déduire en un point éloigné M, une expression en coordonnées sphériques de $\vec{\mathbf{E}}$ en fonction de r et θ.

. **Interaction** de **deux dipôles électriques**, $\overrightarrow{p_1}$ en P et $\overrightarrow{p_2}$ en M, $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$.
Rappel : en sphériques, $\vec{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial r};\frac{\partial}{r\partial\theta};\frac{\partial}{r.sin\theta.\partial\varphi}\right)$ *et donc pour* $\vec{p}_0 = \overrightarrow{cste}$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{\nabla}(\vec{p}_0.\vec{r}) = \vec{p}_0$, $\vec{\nabla}(r^\alpha) = \alpha r^{\alpha-1}\,\vec{u}_r$.
Pour f et g , deux fonctions scalaires de (r,θ,φ), $\vec{\nabla}(fg) = \vec{\nabla}(f) + \vec{\nabla}(g)$.

Montrer que le vecteur champ électrique, dû à $\overrightarrow{p_1}$ en M est $\mathbf{\overrightarrow{E_1}(M) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{\overrightarrow{p_1}.\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{3(\overrightarrow{p_1}.\overrightarrow{u_r})\overrightarrow{u_r}-\overrightarrow{p_1}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$.
Déterminer $\mathbf{\overrightarrow{E_2}(P)}$ dû à $\overrightarrow{p_2}$ en P.
Montrer que l'énergie mutuelle du dipôle 1 sur le dipôle 2 : $\mathbf{E_{1-2} = -\overrightarrow{p_2}\,.\,\overrightarrow{E_1}(M)}$, puis que $E_{1-2} = E_{2-1}$.
Montrer que la force due à $\overrightarrow{E_1}$ sur $\overrightarrow{p_2}$ est $\mathbf{\vec{F}_{1\to2} = -\vec{\nabla}_M E_{1-2}}$ et en déduire son expression en fonction de $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ et $\vec{r}$.
Vérifier le principe de l'action et de la réaction : $\mathbf{\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}}$.
Application : déterminer E_{1-2} et $\vec{F}_{1\to2}$ pour $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} = \vec{p} \perp \vec{r}$.

Correction (12)

Exercice

. **Dipôle électrique** $\vec{p} = q\vec{a}$, $\vec{a} = \overrightarrow{A'A}$, $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{r'} = \overrightarrow{A'M} = \vec{a} + \vec{r}$, *O = m[A', A], -q en A, q en A'.*
$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \left(1 + 2\,\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2}\right)$, *avec* $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right)$.

→ Au 2ème ordre, $V(M) \approx \frac{qacos\,\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{qa^2(1-3\cos^2\theta)}{8\pi\varepsilon_0 r^3}$. Au 1er ordre, $\mathbf{V(M) \approx \frac{q\vec{a}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}} \to \mathbf{\vec{E} = -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)}$.

→ $\mathbf{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}\right)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec{p}.\vec{r}.\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3}\vec{\nabla}(\vec{p}.\vec{r})\right) = \mathbf{\frac{3(\vec{p}.\overrightarrow{u_r})\overrightarrow{u_r}-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$.

. **Interaction de deux dipôles électriques**, $\overrightarrow{p_1}$ en P et $\overrightarrow{p_2}$ en M, $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$

→Énergie mutuelle : $E_{1-2} = -\overrightarrow{p_2}.\overrightarrow{E_1}(M) = -\overrightarrow{p_1}.\overrightarrow{E_2}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\overrightarrow{p_1}.\overrightarrow{p_2} - \frac{3(\overrightarrow{p_1}.\vec{r})(\overrightarrow{p_2}.\vec{r})}{r^2}\right)$
Force due à $\overrightarrow{E_1}$ sur $\overrightarrow{p_2}$: $\vec{F}_{1\to2} = -\vec{\nabla}_M E_{1-2}$.
→ $\vec{F}_{1\to2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left((\overrightarrow{p_1}.\overrightarrow{p_2})\overrightarrow{\nabla_M}\left(\frac{1}{r^3}\right) - \frac{3(\overrightarrow{p_1}.\vec{r})}{r^5}\overrightarrow{\nabla_M}(\overrightarrow{p_2}.\vec{r}) - \frac{3(\overrightarrow{p_2}.\vec{r})}{r^5}\overrightarrow{\nabla_M}(\overrightarrow{p_1}.\vec{r}) - 3(\overrightarrow{p_1}.\vec{r})(\overrightarrow{p_2}.\vec{r})\overrightarrow{\nabla_M}\left(\frac{1}{r^5}\right)\right)$
→ $\mathbf{\vec{F}_{1\to2} = -\frac{3}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left((\overrightarrow{p_1}.\overrightarrow{p_2})\vec{r} + (\overrightarrow{p_1}.\vec{r})\overrightarrow{p_2} + (\overrightarrow{p_2}.\vec{r})\overrightarrow{p_1} - \frac{5(\overrightarrow{p_1}.\vec{r})(\overrightarrow{p_2}.\vec{r})\vec{r}}{r^2}\right)}$.
→ On vérifie le principe de l'action et de la réaction en intervertissant 1 et 2 : $\mathbf{\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}}$ *(pour* $\vec{r} \leftrightarrow -\vec{r}$*).*
Pour $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} = \vec{p} \perp \vec{r}$, $\mathbf{E_{1-2} = \frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$ et $\mathbf{\vec{F}_{1\to2} = -\frac{3p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\vec{r}}$.

(13)

<u>Cours</u> **Critère quantique** (utilisation non nécessaire de la physique quantique) et **dualité onde – corpuscule**.

<u>Exercice</u> Étude du **comportement** d'une **particule** dans un **volume cubique**, de dimension $\mathbf{L^3}$.

Montrer que la fonction d'onde d'une particule libre isolée, de masse m, s'écrit $\psi(\vec{r},t)$ = Aexp $i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)$, où $\vec{k}=\overrightarrow{cste}$ et ω = cste. Exprimer les relations onde – corpuscule entre $\vec{k}$ et $\vec{p}$ et entre ω et E. Retrouver l'équation de Schrödinger pour cette particule. Montrer que la densité de courant correspondante est $\vec{J}=|A|^2\vec{v}$, où $\vec{v}=(\hbar/m)\vec{k}$.

Soit une particule libre dans un volume cubique de côtés de longueur L dans un référentiel orthonormé (O, x, y, z). Déterminer les états stationnaires pour des entiers naturels non nuls n_1,n_2,n_3 : ψ_{n_1,n_2,n_3} en résolvant l'équation de Schrödinger indépendante du temps de la particule libre dans le volume en écrivant : $\psi_{n_1,n_2,n_3}(x,y,z)=\psi_{1,n_1}(x)\psi_{2,n_2}(y)\psi_{3,n_3}(z)$ et en appliquant les conditions aux limites du volume. Montrer que $E_{n_1,n_2,n_3}=E_1+E_2+E_3$, où $E_1=\frac{\hbar^2{k_1}^2}{2m}$, $E_2=\frac{\hbar^2{k_2}^2}{2m}$, $E_3=\frac{\hbar^2{k_3}^2}{2m}$. Déterminer k_1, k_2 et k_3 en fonction de L et des entiers naturels non nuls n_1,n_2,n_3. Ecrire alors l'amplitude de la fonction d'onde variable $\psi(t)$ de la particule et vérifier que la densité de courant de la particule libre dans le volume est nulle.

Correction (13)

<u>Cours</u> **Critère quantique** : utilisation non nécessaire de la physique quantique (au lieu de la physique classique) pour décrire un système si sa dimension caractéristique **a** est telle que $\mathbf{a\gg\lambda=h/p}$, soit Action = $\mathbf{m\times v\times a\gg h}$, où $\mathbf{m\times v}$ est sa quantité de mouvement. **Dualité onde – corpuscule** : à toute particule de quantité de mouvement $\vec{\mathbf{p}}$ et énergie **E**, on peut associer une onde monochromatique plane de vecteur d'onde $\vec{\mathbf{k}}$ et pulsation $\boldsymbol{\omega}$ tels que :

$\vec{\mathbf{p}}=\hbar\vec{\mathbf{k}}$ et $\mathbf{E}=\hbar\boldsymbol{\omega}=\mathbf{h\nu}$: **relation** de **Planck – Einstein**.

<u>Exercice</u>

Equation de Schrodinger indépendante du temps **(S)** : $\mathbf{H\psi=E\psi}$, $\mathbf{H}=\frac{\mathbf{-\hbar^2}}{\mathbf{2m}}\Delta$, avec $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial z}$

Pouvant écrire $\boldsymbol{\psi(x,y,z)=\psi_1(x).\psi_2(y).\psi_3(z)}$, on exprime alors (S) :

$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_2\psi_3\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x}-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_1\psi_3\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y}-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_1\psi_2\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z}=E\,\psi_1(x).\psi_2(y).\psi_3(z)$

$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}{\psi_1}^{-1}(x)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x}-\frac{\hbar^2}{2m}{\psi_2}^{-1}(y)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y}-\frac{\hbar^2}{2m}{\psi_3}^{-1}(z)\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z}=E=E_1+E_2+E_3$.

Il y a donc une somme de trois termes indépendants car fonctions exclusives de x, y, ou bien z.

$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}{\psi_1}^{-1}(x)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x}=E_1$, $-\frac{\hbar^2}{2m}{\psi_2}^{-1}(y)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y}=E_2$, $-\frac{\hbar^2}{2m}{\psi_3}^{-1}(z)\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z}=E_3$.

$\rightarrow \frac{d^2\psi_1}{dx^2}=-\frac{2mE_1}{\hbar^2}\psi_1(x)$, $\frac{d^2\psi_2}{dy^2}=-\frac{2mE_2}{\hbar^2}\psi_2(y)$, $\frac{d^2\psi_3}{dz^2}=-\frac{2mE_3}{\hbar^2}\psi_3(z)$.

Conditions aux limites : $\psi_1(0)=\psi_1(L)=\psi_2(0)=\psi_2(L)=\psi_3(0)=\psi_3(L)=0$

et ${\psi_1}'(0)={\psi_1}'(L)={\psi_2}'(0)={\psi_2}'(L)={\psi_3}'(0)={\psi_3}'(L)=0$.

On résoud alors : $\boldsymbol{\psi_1(x)}=\sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}}}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{\pi n_1 x}}{\mathbf{L}}\right)$, $\boldsymbol{\psi_2(y)}=\sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}}}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{\pi n_2 y}}{\mathbf{L}}\right)$, $\boldsymbol{\psi_3(z)}=\sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}}}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{\pi n_3 z}}{\mathbf{L}}\right)$,

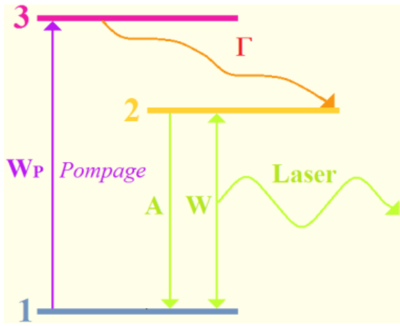
avec $E_1=\frac{\hbar^2{k_1}^2}{2m}$, $E_2=\frac{\hbar^2{k_2}^2}{2m}$, $E_3=\frac{\hbar^2{k_3}^2}{2m}$ et $k_1=\frac{\pi n_1}{L}$, $k_2=\frac{\pi n_2}{L}$, $k_3=\frac{\pi n_3}{L}$.

$\rightarrow \mathbf{E}=\mathbf{E_{n_1,n_2,n_3}}=\frac{\mathbf{\hbar^2\pi^2}}{\mathbf{2mL^2}}\left(\mathbf{{n_1}^2+{n_2}^2+{n_3}^2}\right)$, $(\boldsymbol{n_1,n_2,n_3})\in\mathbb{N}^{*3}$.

$\rightarrow$ 1^er^ niveau d'énergie : $E_{1,1,1}=\frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$. 2^èmes^ niveaux d'énergie : $E_{2,1,1}=E_{1,2,1}=E_{1,1,2}=\frac{3\hbar^2\pi^2}{mL^2}$ ...

(14)

Cours Définir la **cohérence temporelle** et la **cohérence spatiale** d'un faisceau de lumière issu d'une source.



Exercice **Laser** à **milieu amplificateur** à **3 niveaux**

Avec W, A, W_P, Γ : probabilités par seconde (constantes) de transition.

Donner le système d'équations différentielles d'évolution des populations N_1, N_2, N_3.
En posant $N = N_1 + N_2 + N_3$ et l'inversion de population : $\Delta N = N_2 - N_1$, montrer que $\frac{\Delta N}{N} = \frac{(\Gamma - A)W_P - A\Gamma}{(3W+2A+\Gamma)W_P + (A+2W)\Gamma} > 0$ pour $W_P > \frac{A\Gamma}{\Gamma - A} > 0$. Exprimer $\frac{\Delta N}{N}$ pour $W_P \to +\infty$.

Correction (14)

Cours

La **cohérence temporelle** d'un faisceau de lumière est évaluée suivant la largeur de bande spectrale de sa source, δν : $\boldsymbol{\delta\tau \sim 1/\delta\nu}$. Plus une lumière est monochromatique meilleure est sa cohérence. La **cohérence spatiale** d'un faisceau de lumière est évaluée suivant l'extension spatiale de sa source. Pour les fentes d'Young, la largeur de cohérence d'une lumière monochromatique (λ) à la distance D d'observation et avec une largeur de distribution spatiale de l'intensité lumineuse, Δs, est $\sim \boldsymbol{\lambda D/\Delta s}$. Un rayonement laser est cohérent dans un même milieu *(n)* et $\mathbf{f_{milieu} = f_{vide}}$, $\mathbf{c_{milieu} = c/n}$ et $\boldsymbol{\lambda_{milieu} = \lambda_{vide}/n}$.

Exercice ***Laser à milieu amplificateur à 3 niveaux***
Avec W, A, W_P, Γ : probabilités par seconde (cstes)

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = W(N_2 - N_1) + AN_2 + W_P(N_3 - N_1) \\ \frac{dN_2}{dt} = -W(N_2 - N_1) - AN_2 + \Gamma N_3 \\ \frac{dN_3}{dt} = -W_P(N_3 - N_1) - \Gamma N_3 \end{cases}$$

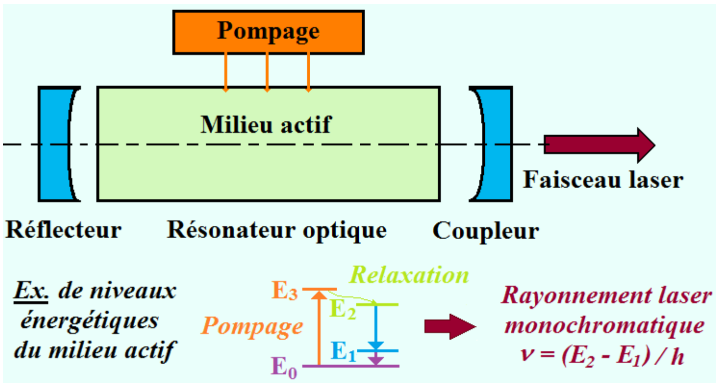
En posant $N = N_1 + N_2 + N_3$ et l'inversion de population : $\Delta N = N_2 - N_1$

$\to \frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt} = 0$ et en régime stationnaire, $\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = 0$

$\to \frac{\Delta N}{N} = \frac{(\Gamma - A)W_P - A\Gamma}{(3W+2A+\Gamma)W_P + (A+2W)\Gamma} > 0$ pour $W_P > \frac{A\Gamma}{\Gamma - A} > 0$ ***(inversion de population)***

et pour $W_P \to +\infty$ ***(saturation)***, $\frac{\Delta N}{N} \to \frac{\Gamma - A}{3W+2A+\Gamma}$ ***(seuil, oscillation laser)***

*« **Laser** » : appareil générant une lumière **cohérente** avec amplification par émission stimulée de rayonnement. Le faisceau est donc monochromatique (λ).*
La transmittance du coupleur contrairement à celle du reflecteur n'est pas nulle.



Chimie (1)

Cours **Dissolution** d'un **solide ionique** : $\mathbf{X_aY_{b\,(s)} = aX_{(aq)}^{b+} + bY_{(aq)}^{a-}}$, **produit de solubilité** : $\mathbf{K_s}$ et **solubilité**, **s**.

Exercice **Ion phosphate**

Solution aqueuse de dihydrogénophosphate d'ammonium, $\mathbf{H_2PO_4^- + NH_4^+}$, à la concentration initiale ***c = 0,1 mol.L*** $^{-1}$, comprenant les couples acidobasiques suivants :

Espèce ammonium : $\mathbf{NH_4^+/NH_3}$ et espèce phosphate : $\mathbf{HPO_4^{2-}/PO_4^{3-}}$, $\mathbf{H_2PO_4^-/HPO_4^{2-}}$, $\mathbf{H_3PO_4/H_2PO_4^-}$.

Constantes des couples : $H_3PO_4/H_2PO_4^-$ *:* $pK_1 = 2,1$; $H_2PO_4^-/HPO_4^{2-}$ *:* $pK_2 = 7,2$; HPO_4^{2-}/PO_4^{3-} *:* $pK_3 = 12$; NH_4^+/NH_3 *:* $pK_a = 9,25$.

Montrer que les réactions acido/basiques possibles sont : $H_2PO_4^- + H_2PO_4^- \rightleftharpoons H_3PO_4 + HPO_4^{2-}$: (a), $H_2PO_4^- + NH_4^+ \rightleftharpoons H_3PO_4 + NH_3$: (b), ou $H_2O + H_2PO_4^- \rightleftharpoons H_3O^+ + HPO_4^{2-}$: (c)

Déterminer les constantes de réaction de (a), (b) et (c). Montrer la prépondérance de (a) par rapport à (b) et (c).

En déduire que $[H_3PO_4] = [HPO_4^{2-}] = x = 10^{-3,55}$, où x est l'avancement final. Déterminer le pH et vérifier la prépondérance de (a) par rapport à (b) et (c) en montrant que $[NH_3] \ll [HPO_4^{2-}]$ et $h = [H_3O^+] \ll [H_3PO_4]$.

Mêmes questions pour c = 0,1 mol.L^{-1} d'hydrogénophosphate de diammonium en solution aqueuse : $HPO_4^{2-} + 2\,NH_4^+$

Correction (1)

Cours **Dissolution d'un solide ionique** : $\mathbf{X_aY_{b\,(s)} = aX_{(aq)}^{b+} + bY_{(aq)}^{a-}}$

Produit de solubilité de **réaction** : $\mathbf{K_s = [X^{b+}]_{éq}^{\,a} \times [Y^{a-}]_{éq}^{\,b}}$, $\mathbf{pK_s = -\log [K_s]}$

Solubilité de $\mathbf{X_aY_{b(s)}}$: **s**, q^{té} maxi en mol.L^{-1} de $X_aY_{b\,(s)}$ que l'on peut dissoudre dans le solvant : dissolution de s mol de $X_aY_{b\,(s)} \rightarrow$ a×s mol de X^{b+} + b×s mol de $Y^{a-} \rightarrow \mathbf{K_s} = (a \times s)^a \times (b \times s)^b = \mathbf{(a^a \times b^b) \times s^{a+b}}$, soit $\mathbf{s = \left(\frac{K_s}{a^ab^b}\right)^{1/(a+b)}}$.

Si $\mathbf{[X^{b+}]^a \times [Y^{a-}]^b < K_s}$, le composé ionique se **dissout** entièrement et si $\mathbf{[X^{b+}]^a \times [Y^{a-}]^b = K_s}$,

la solution est « **saturée** » et le composé ionique précipite. En rajoutant alors du $X_aY_{b\,(s)}$, celui-ci ne se dissout plus.

Exercice ***Ion phosphate***

c = 0,1 mol.L^{-1} *;* $H_3PO_4/H_2PO_4^-$ *:* $pK_1 = 2,1$; $H_2PO_4^-/HPO_4^{2-}$ *:* $pK_2 = 7,2$;
HPO_4^{2-}/PO_4^{3-} *:* $pK_3 = 12$; NH_4^+/NH_3 *:* $pK_a = 9,25$; $Ca_3(PO_4)_2$ *:* $pK_s = 26$

. c mol de dihydrogénophosphate d'ammonium en sol° aqueuse : $\mathbf{H_2PO_4^- + NH_4^+}$

→ Réaction prépondérante *(hypothèse)* :

Meilleur acide : $H_2PO_4^-$ de $H_2PO_4^-/HPO_4^{2-}$ sur la meilleure base : $H_2PO_4^-$ de $H_3PO_4/H_2PO_4^- \rightarrow \mathbf{H_2PO_4^- + H_2PO_4^- \rightleftharpoons H_3PO_4 + HPO_4^{2-}}$: $\mathbf{K} = K_2/K_1 = \mathbf{10^{-5,1}}$

→ $\mathbf{[H_3PO_4] = [HPO_4^{2-}]}$ → $K_1.K_2 = h^2$ → **pH** $= (pK_1 + pK_2)/2 = \mathbf{4,65}$

x : avancement final → $x^2/(c-x)^2 = K \rightarrow x^2 + 2Kcx - Kc^2 \approx 0 \rightarrow x \approx 10^{-3,55}$ mol.L^{-1}

→ $\mathbf{[H_3PO_4] = [HPO_4^{2-}] = 10^{-3,55}}$, $\mathbf{h = 10^{-4,65}}$, 2 réactions supplémentaires possibles :

$\mathbf{H_2PO_4^- + NH_4^+ \rightleftharpoons H_3PO_4 + NH_3}$: $\mathbf{K_a/K_1}$, alors $\mathbf{[NH_3] = 10^{-5,6} \ll [HPO_4^{2-}]}$

$\mathbf{H_2O + H_2PO_4^- \rightleftharpoons H_3O^+ + HPO_4^{2-}}$: $\mathbf{K_2}$, alors $\mathbf{h \ll [H_3PO_4]}$ *(→ hypothèse vérifiée)*

. c mol d'hydrogénophosphate de diammonium en solution aqueuse : $\mathbf{HPO_4^{2-} + 2\,NH_4^+}$

→ Réaction prépondérante *(hypothèse)* :

Meilleur acide : $\mathbf{NH_4^+}$ de NH_4^+/NH_3 sur la meilleure base : $\mathbf{HPO_4^{2-}}$ de $H_2PO_4^-/HPO_4^{2-} \rightarrow \mathbf{HPO_4^{2-} + NH_4^+ \rightleftharpoons H_2PO_4^- + NH_3}$: $\mathbf{K_a/K_2 = 10^{-2,05}}$

→ $\mathbf{[H_2PO_4^-] = [NH_3]}$ → x : avanc^t final → $x^2/(2c-x)(c-x) = 10^{-2,05}$

→ $\mathbf{[H_2PO_4^-] = [NH_3]} = x \approx \mathbf{1,2.10^{-2}}$ **mol.L**$^{-1}$, $\mathbf{[NH_4^+] = 0,188}$ **mol.L**$^{-1}$,

$\mathbf{[HPO_4^{2-}] = 0,088}$ **mol.L**$^{-1}$, **pH** $= 9,25 + \log\left(\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}\right) = \mathbf{8,06}$ *(→ hypothèse vérifiée).*

Chimie (2)

Cours **Loi** de **Beer – Lambert** – **Transmittance**, **absorbance**, **coefficient** d'**extinction molaire**.

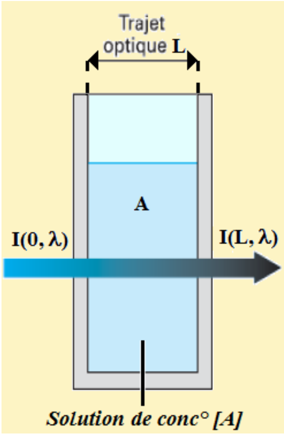
Exercice **Dissolution** du **phosphate de calcium**, $\mathbf{Ca_3(PO_4)_2}$ dans l'**eau**.

Concentration initiale : c = 0,1 mol.L⁻¹ ; Couples : $H_3PO_4/H_2PO_4^-$ *: pK₁ = 2,1;* $H_2PO_4^-/HPO_4^{2-}$ *: pK₂ = 7,2 ;* HPO_4^{2-}/PO_4^{3-} *: pK₃ = 12 ;* NH_4^+/NH_3 *: pKₐ = 9,25 ;* $Ca_3(PO_4)_2$ *: pKₛ = 26*

Montrer que les réactions possibles de la dissolution du phosphate de calcium, $Ca_3(PO_4)_2$ dans l'eau sont :
$Ca_3(PO_4)_2 \rightleftharpoons 3Ca^{2+} + 2PO_4^{3-}$: (a), $Ca_3(PO_4)_2 + H_2O \rightleftharpoons 3Ca^{2+} + 2HPO_4^{2-} + 2OH^-$: (b),
$Ca_3(PO_4)_2 + 2H_2O \rightleftharpoons 3Ca^{2+} + 2H_2PO_4^- + 4OH^-$: (c), ou $Ca_3(PO_4)_2 + 3H_2O \rightleftharpoons 3Ca^{2+} + 2H_3PO_4 + 6OH^-$: (d)
Déterminer pour chaque équation, leur constante de réaction puis les ordres de grandeur des quantités de Ca^{2+} formé.
En déduire que la réaction prépondérante est (b). Montrer alors que $2[Ca^{2+}] = 3[HPO_4^{2-}] = 3[OH^-]$.
En déduire les concentrations des ions en présence, la solubilité s, puis le pH.

Correction (2)

Cours **Loi** de **Beer – Lambert**



Flux lumineux absorbé de l'onde em (λ) par le milieu A, de concentration [A], en x sur une tranche d'épaisseur dx : $\mathbf{dI(x,\lambda) = -k(\lambda)[A](x)\,I(x,\lambda)\,dx}$

→ Pour un milieu homogène d'épaisseur L, $\ln\left(\frac{I(L,\lambda)}{I(0,\lambda)}\right) = -k(\lambda)[A]L$

→ **Transmittance** : $\mathbf{T(\lambda) = \frac{I(L,\lambda)}{I(0,\lambda)} = e^{-k(\lambda)[A]L}}$

→ **Absorbance** (**densité optique**) : $\mathbf{A(\lambda) = \log\left(\frac{I(0,\lambda)}{I(L,\lambda)}\right) = \frac{k(\lambda)[A]L}{\ln 10} = \varepsilon_\lambda[A]L}$,

avec $\boldsymbol{\varepsilon_\lambda} = k(\lambda)/\ln 10$: **coefficient d'extinction molaire** (ln 10 ≈ 2,30) caractérisant l'absorption de l'onde em (λ) par le milieu A.

Exercice ***Dissolution du phosphate de calcium :*** $\boldsymbol{Ca_3(PO_4)_2}$ *dans l'**eau***

→ Réactions possibles :

$Ca_3(PO_4)_2 \rightleftharpoons 3Ca^{2+} + 2PO_4^{3-}$: $K_s = [Ca^{2+}]^3[PO_4^{3-}]^2 = 10^{-26}$
$\mathbf{Ca_3(PO_4)_2 + H_2O \rightleftharpoons 3Ca^{2+} + 2HPO_4^{2-} + 2OH^- : K_sKe^2/K_3{}^2 = 10^{-30} : (r)}$
$Ca_3(PO_4)_2 + 2H_2O \rightleftharpoons 3Ca^{2+} + 2H_2PO_4^- + 4OH^- : K_sKe^4/K_2{}^2K_3{}^2 = 10^{-44}$
$Ca_3(PO_4)_2 + 3H_2O \rightleftharpoons 3Ca^{2+} + 2H_3PO_4 + 6OH^- : K_sKe^6/K_1{}^2K_2{}^2K_3{}^2 = 10^{-67}$

→ Qté de Ca^{2+} formé (resp.) de l'ordre de $\sqrt[5]{10^{-26}} \sim 10^{-5}$, $\sqrt[7]{10^{-30}} \sim 10^{-4}$, $\sqrt[9]{10^{-44}} \sim 10^{-5}$, $\sqrt[11]{10^{-67}} \sim 10^{-6}$ → Réaction prépondérante : (r) (*hypothèse*)
→ $2[Ca^{2+}] = 3[HPO_4^{2-}] = 3[OH^-]$
→ $[\mathbf{OH^-}] = [\mathbf{HPO_4^{2-}}] = \sqrt[7]{\frac{8K_sK_e{}^2}{27K_3{}^2}}$ = **43,5 µmol.L⁻¹**, $[\mathbf{Ca^{2+}}]$ = **65 µmol.L⁻¹**
→ **pH = 9,64**, **s** = $\frac{1}{3}[Ca^{2+}] = \frac{1}{2}[HPO_4^{2-}]$ = **21,8 µmol.L⁻¹** .
et $[\mathbf{H_2PO_4^-}]$ = **0,16 µmol.L⁻¹**, $[\mathbf{PO_4^{3-}}]$ = **0,19 µmol.L⁻¹** *(→ L'hypothèse est vérifiée.)*

Chimie (3)

Cours **Catalyseurs**.

Exercice **Décomposition thermique** de l'**éthanal E** = **CH_3CHO** :

$$\textbf{Amorçage} : CH_3CHO \overset{k_1}{\rightarrow} CH_3^{\cdot} + {}^{\cdot}CHO : \mathbf{(1)}, E_1 = 318\ kJ.mol^{-1}$$

$$\textbf{Propagation} : \begin{cases} {}^{\cdot}CHO \overset{k_2}{\rightarrow} H^{\cdot} + CO : (\mathbf{2}) \\ H^{\cdot} + CH_3CHO \overset{k_3}{\rightarrow} H_2 + CH_3CO^{\cdot} : (\mathbf{3}) \\ CH_3CO^{\cdot} \overset{k_4}{\rightarrow} CH_3^{\cdot} + CO : (\mathbf{4}), E_4 = 75\ kJ.mol^{-1} \\ CH_3^{\cdot} + CH_3CHO \overset{k_5}{\rightarrow} CH_4 + CH_3CO^{\cdot} : (\mathbf{5}), E_5 = 42\ kJ.mol^{-1} \end{cases}$$

$$\textbf{Rupture} : CH_3^{\cdot} + CH_3^{\cdot} \overset{k_6}{\rightarrow} CH_3 - CH_3 : \mathbf{(6)}, E_6 = 0\ kJ.mol^{-1}.$$

Avec l'**AEQS** des **radicaux** et **atomes libres** durant le mécanisme, déterminer la **vitesse de décomposition** de **E** : $\mathbf{v_{-E}} = -\frac{d[E]}{dt}$ en fonction de $[\mathbf{E}]$. Préciser les vitesses de formation des **espèces moléculaires** de la réaction.
Déterminer l'**ordre** et l'**énergie d'activation**. Exprimer la **longueur minimale de chaîne** : $\mathbf{L} = -\frac{\mathbf{d[E]}}{\mathbf{dt}}/\mathbf{k_1[E]}$.

Correction (3)

Cours Un **catalyseur** est une entité capable d'**accélérer** la **vitesse** d'une **réaction** mais **sans être consommée par celle-ci** (ou en étant régénérée). **Trois types** :

- **Catalyse homogène** : le catalyseur et les réactifs sont de même phase.
- **Catalyse hétérogène** : le catalyseur et les réactifs sont de phases différentes.
- **Catalyse enzymatique** : le catalyseur est un biocatalyseur.

Exercice ***Décomposition thermique de l'éthanal E = CH_3CHO***

→ Vitesse de décomposition de E : $v = -\frac{d[E]}{dt} = k_1[E] + k_3[H^{\cdot}][E] + k_5[CH_3^{\cdot}][E]$

→ **AEQS** des **radicaux** et **atomes libres** durant le mécanisme :

$$\mathbf{CH_3^{\cdot}} : \frac{d[CH_3^{\cdot}]}{dt} = k_1[E] + k_4[CH_3CO^{\cdot}] - k_5[CH_3^{\cdot}][E] - 2k_6[CH_3^{\cdot}]^2 = 0$$

$$\mathbf{{}^{\cdot}CHO} : \frac{d[{}^{\cdot}CHO]}{dt} = -k_2[{}^{\cdot}CHO] + k_1[E] = 0$$

$$\mathbf{H^{\cdot}} : \frac{d[H^{\cdot}]}{dt} = k_2[{}^{\cdot}CHO] - k_3[H^{\cdot}][E] = 0$$

$$\mathbf{CH_3CO^{\cdot}} : \frac{d[CH_3CO^{\cdot}]}{dt} = k_3[H^{\cdot}][E] - k_4[CH_3CO^{\cdot}] + k_5[CH_3^{\cdot}][E] = 0.$$

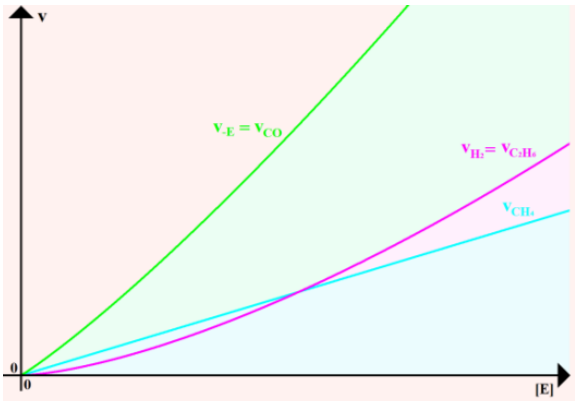
$$\rightarrow [CH_3^{\cdot}] = \sqrt{\frac{k_1}{k_6}}\sqrt{[E]} \text{ et } \mathbf{v_{-E}} = -\frac{d[E]}{dt} = \mathbf{2k_1[E] + k_5\sqrt{\frac{k_1}{k_6}}[E]^{3/2}}$$

Vitesses de formation des **espèces moléculaires** de la réaction :

$\mathbf{v_{CO}} = \frac{d[CO]}{dt} = k_2[{}^{\cdot}CHO] + k_4[CH_3CO^{\cdot}] = v_{-E} = \mathbf{2k_1[E] + k_5\sqrt{\frac{k_1}{k_6}}[E]^{3/2}}$

$\mathbf{v_{H_2}} = k_3[H^{\cdot}][E] = \mathbf{k_1[E]}$, $\mathbf{v_{C_2H_6}} = k_6[CH_3^{\cdot}]^2 = \mathbf{k_1[E]} = v_{H_2}$

$\mathbf{v_{CH_4}} = k_5[CH_3^{\cdot}][E] = \mathbf{k_5\sqrt{\frac{k_1}{k_6}}[E]^{3/2}}$ → $v_{-E} = v_{H_2} + v_{CH_4} + v_{C_2H_6} = v_{CO}$



Ordre et énergie d'activation : Pyrolise (1) à ~ 500 °C → Loi d'Arrhenius :

$k_1 \sim A.\exp\left(\frac{-318000}{8{,}31.773}\right) \approx A.3.10^{-22}$, (5), (6) → $2k_1[E] \ll k_5\sqrt{\frac{k_1}{k_6}}[E]^{3/2}$

→ ~ **Décomposition** d'**ordre 3/2** et la loi d'Arrhenius

→ $\mathbf{E_a = E_5 + E_1/2 - E_6/2}$ → $E_a \approx 201$ kJ.mol^{-1}.

Longueur minimale de chaîne $\mathbf{L} = -\frac{d[E]}{dt}/k_1[E] = 2 + v_{CH_4}/v_{H_2} \geq \mathbf{100}$

En moyenne ≥ 100 cycles avant rupture.

Chimie (4)

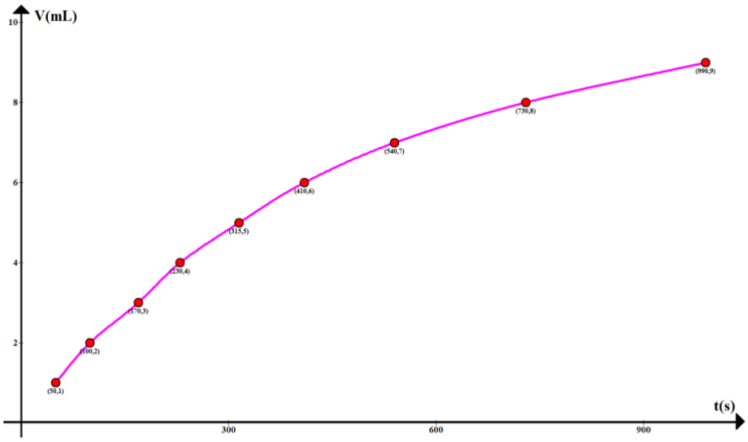
Cours **Avancement** et **taux** d'**avancement** de **réaction**.

Exercice **Réaction d'oxydo-réduction** avec les **couples** $\mathbf{H_2O_{2(aq)}}$ **/** $\mathbf{H_2O}$ et $\mathbf{I_{2(aq)}}$**/** $\mathbf{I^-_{(aq)}}$:

$2I^-_{(aq)} = I_{2(aq)} + 2e^-$ et $H_2O_{2(aq)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^- = 2H_2O$ → Bilan : $\mathbf{H_2O_{2(aq)} + 2H^+_{(aq)} + 2I^-_{(aq)} = I_{2(aq)} + 2H_2O}$.

On verse $V_3 = 10$ mL d'une solution d'iodure de potassium à $c_3 = 60$ mmol.L^{-1} avec 200 mL d'acide sulfurique à 0,5 mol.L^{-1}, 1 mL d'empois d'amidon et avec une burette, V = 1 mL d'une solution de thiosulfate de sodium à Na_2SO_3 à 1 mol.L^{-1} dans un erlenmeyer. On ajoute à t = 0 $V_4 = 10$ mL d'une solution d'eau oxygénée à $c_4 = 0,5$ mol.L-1 et on note le temps où une coloration bleue apparait. On verse alors à la burette 1 mL de la solution de thiosulfate de sodium et on note le temps où la coloration bleue réapparait, on réitère ainsi ces opérations huit fois. On obtient :

V(mL)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t (s)	50	100	170	230	315	410	540	730	990
d=ΔV/Δt	0,0200	0,0143	0,0167	0,0117	0,0105	0,0077	0,0053	0,0038	
d/(10-V)	22,2	17,9	23,9	19,5	21,0	19,3	17,7	19,0	*(.10^{-4})*



A quoi sert le thiosulfate de potassium ? Qu'observe-t-on ? Quel est le type de réaction ? Comment évolue la concentration des ions I$^-$? Montrer que la vitesse de réaction est du type $v = k.[H_2O_2]^a[I^-]^b[H^+]^c = k'[H_2O_2]^a[I^-]^b = k_{app}[H_2O_2]^a$, avec $k' = k.\ [H^+]^c$ = cste et $k_{app} = k'[I^-]^b$ = cste. Comment varie les valeurs de la dernière ligne du tableau ? En déduire que V est du type $10 - ae^{-bt}$. Pour a = 1 , montrer alors que $\mathbf{[H_2O_2] = [H_2O_2]_0.exp(-k_{app}t)}$, puis déterminer le temps de ½ réaction et le comparer à la courbe ci-dessus.

Correction (4)

Cours **Avancement de réaction** : $\mathbf{x_e = (n_e - n_{e,\ initiale}) / \nu_e}$, *où ν_e : coefficient stoechiométrique de l'espèce e de la réaction. ν_e est négatif si e est un réactif et positif si e est un produit de la réaction.* **Taux d'avancement de réaction** : $\mathbf{\tau = (n_{e,\ initiale} - n_e) / (n_{e\ initiale} - n_{e,\infty}) = x_e / x_{e,\infty}}$, *où e est une espèce (réactif ou produit) de la réaction*

Exercice

La dernière ligne du tableau ayant des valeurs ~ constantes (autour de 20,0.10^{-4}) montre que l'évolution est exponentielle, V du type $\mathbf{10 - ae^{-bt}}$: réaction estimée d'ordre 1. Le thiosulfate de potassium sert à éliminer à chaque fois le diiode présent, ce que l'on observe avec la disparition de la teinte bleue due à l'empois d'amidon. Il réduit (de façon rapide et totale) le diiode : $\mathbf{I_{2(aq)} + 2S_2O_3^{2-}{}_{(aq)} \rightarrow 2I^-_{(aq)} + S_4O_6^{2-}{}_{(aq)}}$. Ainsi, les ions I$^-$ restent en concentration quasi-constante au cours du temps. La vitesse de réaction est du type $v = k.[H_2O_2]^a[I^-]^b[H^+]^c = k'[H_2O_2]^a[I^-]^b$ → $v = k_{app}[H_2O_2]^a$, avec $k' = k.\ [H^+]^c$ = cste car l'acide présent pour la réaction est en excès et $k_{app} = k'[I^-]^b$ = cste d'après ce qui précède. Donc, pour a = 1, $-\frac{d[H_2O_2]}{dt} = k_{app}\,[H_2O_2] \rightarrow \mathbf{[H_2O_2] = [H_2O_2]_0.exp(-k_{app}t)}$.

Le temps de ½ réaction est donc $\mathbf{t_{1/2} = \ln 2 / k_{app} = \ln 2 / (k.\ [H^+]^c[I^-]^b)}$, $\mathbf{t_{1/2} = 315\,s}$ en **V = 5 mL**.